



# Lezione 4 – macchine non deterministiche

Lezione del 16/03/2023

# A proposito dell'insieme delle quintuple

- ▶ Siamo al paragrafo 2.3 della dispensa 2 (pag. 4).
- ▶ Prendiamo una macchina di Turing:
  - ▶ cioè, un alfabeto  $\Sigma$  e un insieme degli stati  $Q$
  - ▶ e, soprattutto, l'insieme delle sue quintuple  $P$
  - ▶ osservate che è sufficiente avere l'insieme  $P$  per sapere tutto di  $T$ : da  $P$  possiamo ricavare sia  $\Sigma$  che  $Q$
  - ▶ beh, in effetti  $P$  non ci dice proprio tutto tutto: per sapere tutto di  $T$ , oltre che  $P$ , dobbiamo conoscere anche quale sia lo stato iniziale e quali siano gli stati finali
  - ▶ e questa cosa, quello che ci occorre per sapere tutto di  $T$ , tenetelo a mente perché ci servirà nella prossima lezione
- ▶ Bene. Quindi,  $P$  è il "cuore" di  $T$ . Ora, andiamo a studiare la struttura di  $P$
- ▶ Intanto, ricordiamo che possiamo vedere  $P$  come una funzione che associa ad una coppia (stato, simbolo) una tripla (stato, simbolo, movimento), ossia,
  - ▶ 
$$P: Q \times \Sigma \rightarrow \Sigma \times Q \times \{S, F, D\}$$

## P è una funzione totale?

- ▶ Una quintupla  $\langle q_1, a, b, q_2, m \rangle$  ci dice che: se siamo nello stato  $q_1$  e leggiamo il carattere  $a$  allora dobbiamo comportarci in un certo modo – e sappiamo in quale modo. Facile.
- ▶ Ma cosa succede se, trovandoci in uno stato  $q$  e leggendo un carattere  $s$  non troviamo in  $P$  alcuna quintupla i cui primi due simboli sono  $q$  e  $s$ ?
  - ▶ non viene indicata alcuna azione da compiere!
- ▶ Non viene indicata alcuna azione da compiere. E, allora,  $T$  non può far altro che non compiere alcuna azione.
- ▶ Cioè,  $T$  interrompe la sua computazione - è come se avesse raggiunto uno stato finale
- ▶ però, uno stato finale non lo ha raggiunto
  - ▶ e questo fatto qualche conseguenza ce l'avrà pure
  - ▶ altrimenti, a cosa servono gli stati finali?
- ▶ Per capire, dobbiamo chiarire che cosa significa che ad una coppia  $(q,s)$  non è associata alcuna quintupla in  $P$  – e lo facciamo separatamente per i trasduttori e per i riconoscitori

## P è una funzione totale? (Trasduttori)

- ▶ Se T è un trasduttore, che cosa significa che ad una coppia  $(q,s)$  non è associata alcuna quintupla in P?
- ▶ Facciamo un esempio: consideriamo una macchina T a 3 nastri che calcola il risultato dell'addizione in colonna di due interi **nel caso in cui il secondo addendo è costituito di sole cifre pari**
  - ▶ le quintuple di T sono molto simili a quelle della macchina che esegue la somma in colonna di due interi qualsiasi (che abbiamo analizzato abbondantemente)
  - ▶ l'unica differenza è le quintuple di T si aspettano di trovare solo cifre pari sul secondo nastro
  - ▶ ossia, contiene solo quintuple del tipo  $\langle q, (x,y, \blacksquare), (x,y,z), q_1, sinistra \rangle$ , dove x è una cifra qualsiasi e y è una cifra pari (e z è la cifra che si ottiene da  $x+y$ )
- ▶ Se assumiamo che il secondo addendo (scritto sul secondo nastro) sia costituito di sole cifre pari, allora
  - ▶ eseguendo tutte le quintuple che abbiamo visto nelle lezioni precedenti
  - ▶ T scrive, una alla volta, le cifre del risultato sul nastro di output
  - ▶ ossia, man mano che la computazione prosegue, le cifre del risultato compaiono sul nastro di output

## P è una funzione totale? (Trasduttori)

- ▶ T è una macchina a 3 nastri che calcola il risultato dell'addizione in colonna di due interi **nel caso in cui il secondo addendo è costituito di sole cifre pari**
  - ▶ non esistono quintuple di T del tipo  $\langle q, (x, y, \blacksquare), (x, y, z), q_1, \text{sinistra} \rangle$ , dove y è una cifra dispari
  - ▶ Se assumiamo che il secondo addendo (scritto sul secondo nastro) sia costituito di sole cifre pari, allora
    - ▶ eseguendo tutte le quintuple che abbiamo visto nelle lezioni precedenti, T scrive, una alla volta, le cifre del risultato sul nastro di output
    - ▶ ossia, man mano che la computazione prosegue, le cifre del risultato compaiono sul nastro di output
  - ▶ Cosa succede, però, se un utente distratto ha scritto 1234 sul primo nastro e 2560 sul secondo nastro?
    - ▶ T scrive 4 sul nastro di output
    - ▶ poi, scrive 9 sul nastro di output
    - ▶ poi... OPS! Non trova più alcuna quintupla da eseguire
    - ▶ ma il nastro di output non è vuoto...

## P è una funzione totale? (Trasduttori)

- Se, trovandoci in uno stato  $q$  e leggendo un carattere  $s$  non troviamo in  $P$  alcuna quintupla i cui primi due simboli sono  $q$  e  $s$ , poiché non viene indicata alcuna azione da compiere,  $T$  non può far altro che non compiere alcuna azione!
- Cioè,  $T$  interrompe la sua computazione - è come se avesse raggiunto uno stato finale
- Quindi potremmo pensare che: ogni qualvolta ad una coppia  $(q,s)$  non è associata alcuna quintupla in  $P$ , è possibile aggiungere a  $P$  la quintupla  $\langle q, s, s, q_f, F \rangle$
- Tuttavia...
  - mentre un trasduttore lavora, man mano che esegue le sue quintuple, è possibile che scriva qualcosa sul nastro di output - la prima parte del risultato
  - però se la computazione di  $T$  è terminata non perché  $T$  è entrata in uno stato finale ma perché non ha trovato quintuple da eseguire allora *quel che è scritto sul nastro di output non è il risultato cercato!*
  - E l'utente come fa a capirlo????



## P è una funzione totale? (Trasduttori)

- ▶ Come fa l'utente come fa a capire se quel che è scritto sul nastro di output è il risultato cercato oppure no?
- ▶ Abbiamo due possibilità a disposizione:
  - ▶ chi ha progettato T, con la santa pazienza, ha considerato **tutte le possibilità (stato,simbolo), anche quelle "impossibili"** (che si incontrano quando l'utilizzatore non legge il libretto di istruzioni di T e scrive sul nastro un input non conforme alle specifiche): per ciascuna di queste coppie impossibili ha scritto una serie di quintuple che prima cancellano il contenuto del nastro di output e poi portano T in  $q_f$ 
    - ▶ o, equivalentemente, per ciascuna di queste coppie, viene scritto un messaggio di errore sul nastro di output prima di raggiungere lo stato  $q_f$
  - ▶ chi ha progettato T ha deciso che **se un utilizzatore è stato poco accorto e non ha rispettato le specifiche... peggio per lui!** E, semplicemente, chi ha progettato T ha scritto solo le quintuple per le coppie (stato,simbolo) significative. E, così, ha progettato una funzione P non totale

## P è una funzione totale? (Riconoscitori)

- ▶ Per capire cosa accade quando T è un riconoscitore dobbiamo prima chiarire...
- ▶ Cosa significa, nel caso in cui T è un riconoscitore, che ad una coppia  $(q,s)$  non è associata alcuna quintupla in P?
- ▶ Facciamo un esempio: consideriamo una macchina T che decide se il risultato dell'addizione di due interi sarà un numero pari
  - ▶ non deve calcolare il risultato: deve solo terminare in  $q_A$  qualora il risultato sia pari, in  $q_R$  qualora il risultato sia dispari
- ▶ Quindi, se assumiamo che l'input sia scritto sul nastro di T nella forma "primo addendo + secondo addendo" (dove ciascun addendo è una sequenza di cifre), allora
  - ▶ T deve spostare la testina sulla cifra meno significativa del primo addendo (quella a sinistra del '+') e ricordarsi se è pari o dispari
  - ▶ poi deve spostare la testina sulla cifra meno significativa del secondo addendo (ossia deve superare la sequenza di **cifre** che compongono il secondo addendo e posizionarsi sulla cifra a sinistra del '□') e, dipendentemente da quello che si ricordava e dal fatto che tale cifra sia pari o dispari, terminare in  $q_A$  o in  $q_R$ .



## P è una funzione totale? (Riconoscitori)

- Dunque, **se assumiamo che l'input sia scritto sul nastro di T nella forma "primo addendo + secondo addendo"**, allora la nostra macchina T, buona buona, tric trac tric trac, esegue la sua computazione e ci dà la risposta corretta – memorizzata nel suo stato. Fantastico.
- Ma che succede se, invece, un utilizzatore poco accorto scrive sul nastro di T la parola "576+48+"? Come si comporta T?
  - non sappiamo come si comporta, ma certamente ci aspettiamo che essa non termini in  $q_A$
  - perché T deve terminare in  $q_A$  solo se la somma di due numeri è pari
  - e qui, invece, le viene proposta la somma di quasi tre numeri (ossia, due numeri e un +)
  - dall'utente che **non rispetta le specifiche di T** (e questa cosa è discussa bene nel paragrafo 2.3)!

## P è una funzione totale? (Riconoscitori)

- ▶ Ma che succede se, invece, un utilizzatore poco accorto scrive sul nastro di T la parola "576+48+"? Come si comporta T?
  - ▶ ci aspettiamo che la computazione di T termini in  $q_R$
- ▶ Allora, ci sono due possibilità:
  - ▶ chi ha progettato T, con la santa pazienza, ha considerato **tutte le possibilità (stato,simbolo), anche quelle "impossibili"** (quando l'utilizzatore non legge il libretto di istruzioni di T e scrive sul nastro un input non conforme alle specifiche): per ciascuna di queste coppie impossibili ha scritto una quintupla che porta T in  $q_R$ .
  - ▶ chi ha progettato T ha deciso che **se un utilizzatore è stato poco accorto e non ha rispettato le specifiche... peggio per lui!** E, semplicemente, chi ha progettato T ha scritto solo le quintuple per le coppie (stato,simbolo) significative. E, così, ha progettato una funzione P non totale
- ▶ Possiamo ora rispondere alla domanda "ma se T è un riconoscitore e ad una coppia (q,s) non è associata alcuna quintupla in P?: in questo caso, possiamo assumere che, in tal caso, T rigetti
  - ▶ è come se, *implicitamente*, aggiungessimo a P la quintupla  $\langle q, s, s, q_R, F \rangle$

## P è una funzione totale? (Riconoscitori)

- ▶ Possiamo ora rispondere alla domanda “ma se T è un riconoscitore e ad una coppia  $(q,s)$  non è associata alcuna quintupla in P?: in questo caso, possiamo assumere che, in tal caso, T rigetti
  - ▶ è come se, *implicitamente*, aggiungessimo a P la quintupla  $\langle q, s, s, q_R, F \rangle$
- ▶ Attenzione però: tutto ciò ha una importante conseguenza
- ▶ Torniamo a considerare la macchina che decide se la somma di due numeri dati in input è un numero pari completata con le quintuple che portano la macchina in  $q_R$  se l'input è scritto in un formato errato
  - ▶ scriviamo il nostro input sul nastro e facciamo partire la computazione
  - ▶ se la macchina termina in  $q_A$  allora possiamo essere certi: la somma dei due numeri è proprio un numero pari
  - ▶ ma se la macchina termina in  $q_R$  allora non possiamo concludere che la somma dei due numeri è un numero dispari
    - ▶ infatti la macchina potrebbe aver terminato in  $q_R$  perché il formato dell'input era errato
- ▶ Perciò, se la macchina termina in  $q_R$  possiamo concludere soltanto che la somma dei due numeri **non è un numero pari!**



## E se P non fosse una funzione?

- ▶ E che vuol dire “e se P non fosse una funzione?”?!
- ▶ Ma, prima ancora, cosa vuol dire che P è una *funzione*?
- ▶ Beh, questo è facile: se P è una funzione, allora, per ogni stato q e per ogni carattere a, non possono esistere due quintuple che iniziano con la coppia (q,a)
- ▶ In effetti, una quintupla  $\langle q_1, a, b, q_2, m \rangle$ , per come la abbiamo definita, ci dice che: se siamo nello stato  $q_1$  e leggiamo il carattere a allora dobbiamo comportarci in un certo modo – e non abbiamo scelta: trovandoci nello stato  $q_1$  e leggendo il carattere a non possiamo far altro che scrivere b, entrare nello stato  $q_2$  e muovere come specificato da m la testina.
- ▶ Quindi, una quintupla è un ordine – senza se e senza ma, se vogliamo giungere alla soluzione (dell’istanza) del problema, dobbiamo obbedire!
- ▶ E, quindi, da quello che abbiamo detto fino ad ora, non avrebbe senso avere due quintuple  $\langle q_1, a, b, q_2, m \rangle$  e  $\langle q_1, a, b', q'_2, m' \rangle$ : come dovremmo mai comportarci trovandoci nello stato  $q_1$  e leggendo il carattere a?!

## E se $P$ non fosse una funzione?

- ▶ Possiamo anche vedere una quintupla come una indicazione precisa e non ambigua circa quale operazione eseguire per giungere alla soluzione
  - ▶ siamo certi che, se agiamo come specificato nella quintupla, arriviamo alla soluzione.
- ▶ Una indicazione che viene fornita da chi ha progettato la macchina di Turing
  - ▶ e che è una conseguenza della sua analisi del problema che lo ha condotto ad individuare un certo procedimento di soluzione
- ▶ E se costui, il progettista, arrivato ad un certo punto non sapesse bene che pesci pigliare? O se si scocciasse di fare il precisino per indicarci le istruzioni per filo e per segno?!
- ▶ Potrebbe, che so, dirci “se sei nello stato  $q$  e leggi il simbolo  $a$ , non so bene quale è la cosa giusta da fare ma, di certo, devi fare una di queste cose: [elenco di cose da fare fra cui scegliere]. Decidi un po' tu...”
- ▶ E come farebbe costui a comunicarci questa cosa? Ma con tante quintuple che iniziano con la stessa coppia stato interno – simbolo letto!

## E se P non fosse una funzione?

- ▶ Tante quintuple che iniziano con la stessa coppia (stato interno – simbolo letto):
  - ▶  $\langle q, a, b_1, q_1, m_1 \rangle, \langle q, a, b_2, q_2, m_2 \rangle, \dots, \langle q, a, b_k, q_k, m_k \rangle,$
  - ▶ chiamiamo, fra noi, questa struttura (tante quintuple che iniziano con la stessa coppia) una multi-quintupla
- ▶ Cosa accade quando l'insieme delle quintuple di una macchina T ha la multi-quintupla sopra descritta e, durante una computazione  $T(x)$ , si trova nello stato interno q e legge il carattere a?
- ▶ Possiamo descrivere il comportamento di T in due modi diversi:
  - ▶ T diventa una macchina super-iper-ultra parallela
  - ▶ T chiede l'intervento di un genio della lampada (burlone e pasticcione)
  - ▶ i due modi diversi sono **equivalenti**
- ▶ Andiamo con ordine...



# Una macchina super-iper-ultra parallela

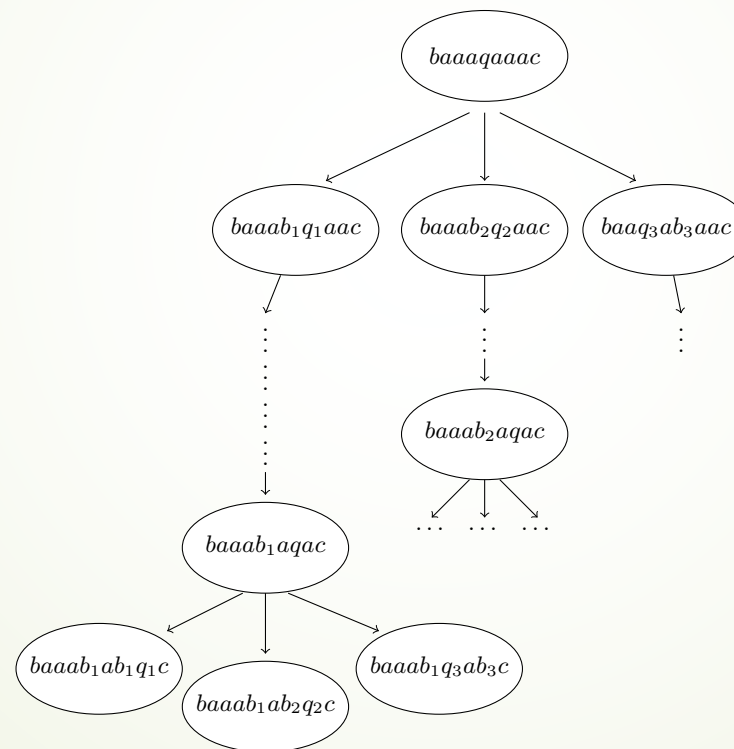
- ▶ In questo caso, quando T si trova nello stato q e legge il simbolo a, le k quintuple  $\langle q, a, b_1, q_1, m_1 \rangle$ ,  $\langle q, a, b_2, q_2, m_2 \rangle$ , ...  $\langle q, a, b_k, q_k, m_k \rangle$ , T le esegue... tutte! In parallelo!
- ▶ Succede una specie di magia e... ta-dah! Si moltiplicano i nastri, e si moltiplica l'unità di controllo
- ▶ così che avviene la transizione dallo stato globale di partenza a k stati globali differenti
  - ▶ che proseguono la computazione, ognuno per conto suo
- ▶ e se, successivamente, da uno di questi stati globali ci si troverà a dover eseguire un'altra multi-quintupla, il processo di moltiplicazione si ripeterà
  - ▶ diventerà una specie di albero
- ▶ vediamo

# Una macchina super-iper-ultra parallela

$P$  contiene le tre quintuple seguenti che iniziano con  $(q, a)$ :

$\langle q, a, b_1, q_1, D \rangle, \langle q, a, b_2, q_2, D \rangle, \langle q, a, b_3, q_3, S \rangle$

La macchina si trova nello stato globale  $SG = baaaqaac$



Ciascun “**ramo**” dell’albero è una **computazione deterministica** della macchina



# Una macchina super-iper-ultra parallela

- ▶ Già, ma, allora, quale è l'esito di una computazione di una macchina capace di auto-replicarsi in innumerevoli copie parallele?
- ▶ Come facciamo a dire quando una computazione di siffatta macchina accetta e quando rigetta? Come facciamo a sapere se la soluzione all'istanza  $x$  del nostro problema è 0 oppure 1? A quale delle copie parallele dobbiamo dar credito?
- ▶ Per rispondere, dobbiamo prima chiarire una questione: anche se stiamo parlando di funzioni a valori in  $\{0,1\}$ , c'è, in realtà, una certa asimmetria fra i due valori. O meglio, c'è una asimmetria fra gli stati  $q_A$  e  $q_R$ 
  - ▶ ad un riconoscitore è richiesto di riconoscere le parole che **soddisfano** una certa proprietà - ad esempio, deve riconoscere le parole palindrome
  - ▶ non di riconoscere le parole che **non** soddisfano quella proprietà - per questo insieme di parole, se ci interessa individuarle, potremmo progettare un altro riconoscitore!
- ▶ Quindi, in effetti, quel che ci interessa "di più" è lo stato  $q_A$  - possiamo dire che arriviamo alla soluzione quando la macchina raggiunge lo stato  $q_A$ 
  - ▶ come se fossimo in un groviglio di strade e dovessimo trovare il percorso che ci porta a destinazione: dei percorsi che non arrivano a destinazione, che ci importa?

# Una macchina super-iper-ultra parallela

- E allora, come facciamo a dire quando una computazione di siffatta macchina accetta e quando rigetta? Come facciamo a sapere se la soluzione all'istanza  $x$  del nostro problema è 0 oppure 1? A quale delle copie parallele dobbiamo dar credito?
- Ragioniamo: l'idea delle multi-quinuple è che ci vengono mostrate tante strade possibili che *potrebbero* "portarci a destinazione" – ossia, allo stato  $q_A$
- Naturalmente, non tutte le strade portano alla soluzione.
- **Ma basta che ce ne sia una, di strada che porta a destinazione!**
- Quindi, diciamo che: la computazione di una macchina super-iper-ultra parallela
  - accetta se esiste almeno un percorso nell'albero che porta la macchina nello stato  $q_A$
  - rigetta se tutti i percorsi nell'albero portano nello stato  $q_R$  – ossia se il percorso che porta a destinazione proprio non esiste!

# Arriva il genio (burlone e pasticciatore)

- ▶ In questo caso, quando T si trova nello stato q e legge il simbolo a, e P contiene le k quintuple  $\langle q, a, b_1, q_1, m_1 \rangle, \langle q, a, b_2, q_2, m_2 \rangle, \dots, \langle q, a, b_k, q_k, m_k \rangle$ , T chiama un **genio** e quello **sceglie** quale di queste quintuple eseguire!
- ▶ Così, la computazione diventa una sequenza di **scelte** del genio
  - ▶ e, neanche a dirlo, geni diversi possono fare scelte diverse
- ▶ Per questo la computazione di T prende il nome di **non deterministica**
  - ▶ **perché il suo esito non è completamente determinato dal suo input**
- ▶ Cioè: **se una macchina di Turing non ha multi-quintuple, allora, per ogni input x, la computazione T(x) avrà sempre lo stesso esito**
  - ▶ se eseguiamo T(x) ed essa termina in  $q_A$ , e poi ripetiamo T(x) un milione di volte, ogni ripetizione terminerà in  $q_A$
  - ▶ e lo stesso vale se la prima esecuzione di T(x) termina in  $q_R$
  - ▶ per questo una macchina che non ha multi-quintuple è **deterministica**
- ▶ **Se, invece, T contiene multi-quintuple, se T è non deterministica, allora esecuzioni diverse di T(x) possono avere esiti diversi!**



## Arriva il genio (burlone e pasticcione)

- Già, ma, allora, quale è l'esito di una computazione di una macchina non deterministica  $T$  nel modello in cui interviene il genio?
  - Anzi, visto che la macchina è non deterministica, chiamiamola  $NT$
- Come facciamo a dire quando  $NT(x)$  accetta e quando rigetta? Come facciamo a sapere se la soluzione all'istanza  $x$  del nostro problema è 0 oppure 1?
- La risposta è analoga al modello super-iper-ultra parallelo e, come in quel caso, è asimmetrica:
  - $NT(x)$  accetta se esiste almeno una scelta di multi-quintuple (o, se preferite, almeno una scelta di almeno un genio) che porta la macchina nello stato  $q_A$
  - $NT(x)$  rigetta se qualunque scelta di multi-quintuple (o, se preferite, qualunque scelta di qualunque genio) porta la macchina nello stato  $q_R$



# Equivalenza fra i due modelli

- ▶ In definitiva
  - ▶ una macchina super-iper-ultra parallela accetta se *esiste un percorso* nell'albero che la fa entrare nello stato  $q_A$  e rigetta se *tutti i percorsi* la fanno entrare nello stato  $q_R$
  - ▶ una macchina genio-dotata accetta se *esiste una scelta di quintuple* che la fa entrare nello stato  $q_A$  e rigetta se *tutte le scelte di quintuple* la fanno entrare nello stato  $q_R$
- ▶ I due modelli sono equivalenti!
- ▶ Sono due modelli, due modi, in cui possiamo descrivere una **macchina di Turing non deterministica**

# Determinismo e non determinismo

## ► Ricapitolando:

- una macchina di Turing T è **deterministica** se, per ogni stato q e per ogni carattere a, l'insieme P delle sue quintuple non contiene più di una quintupla che inizia con (q,a)
- una macchina di Turing NT è **non deterministica** se esistono uno stato q e un carattere a tali che l'insieme P delle sue quintuple contiene due o più quintuple che iniziano con (q,a)

## ► **consideriamo solo macchine non deterministiche di tipo riconoscitore**

- Una computazione non deterministica contiene tante computazioni deterministiche – una per ciascun ramo dell'albero
- Il **grado di non determinismo** di una macchina non deterministica NT è il massimo numero di quintuple che iniziano con la stessa coppia stato-carattere, ossia,
$$\max_{q,a} |\{ \langle q, a, b, q_1, m \rangle \in P \}|$$
- Naturalmente, il grado di non determinismo di una macchina definita sull'alfabeto  $\Sigma$  e sull'insieme degli stati Q può essere al massimo
$$|\Sigma| \times |Q| \times 3$$
  - ed è, quindi, (indovinate un po'?) **COSTANTE!!!!**
- Osservazione: **una macchina deterministica è una particolare macchina non deterministica con grado di non determinismo uguale a 1**



# Determinismo e non determinismo

- ▶ Certo, che questa idea del non determinismo – della macchina che si auto-replica o che dispone di un genio – pare potente assai
- ▶ Chissà quante belle cose possiamo fare con una macchina non deterministica che non potremmo fare con una macchina deterministica...
- ▶ E invece no! Se sappiamo risolvere un problema con una macchina non deterministica allora sappiamo risolverlo anche con una macchina deterministica! (Teorema 2.1)
- ▶ Infatti possiamo sempre costruire una macchina deterministica  $T$  che **simula** una macchina non deterministica  $NT$

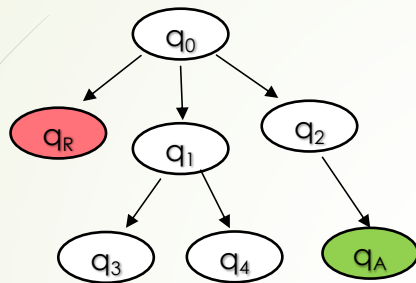


# Determinismo e non determinismo

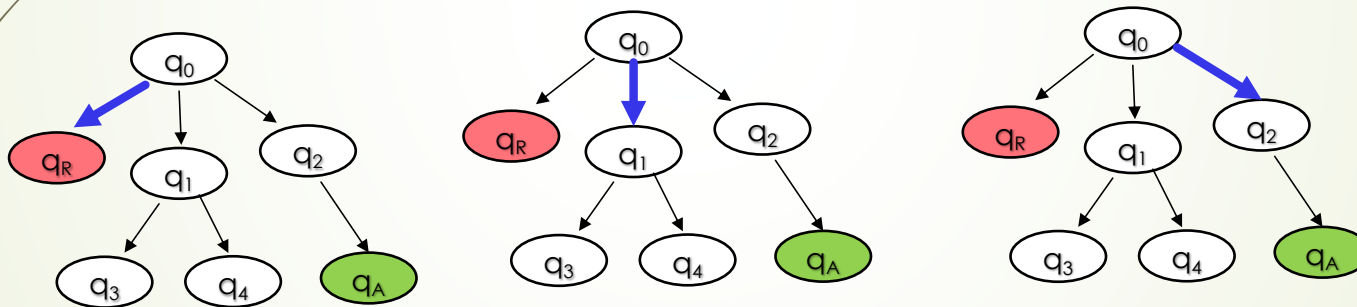
- ▶ Infatti possiamo sempre costruire una macchina deterministica  $T$  che simula una macchina non deterministica  $NT$ : con input  $x$ 
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di un solo passo: se qualcuna accetta allora  $T$  accetta, se tutte rigettano allora  $T$  rigetta, altrimenti
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di due passi: *se qualcuna accetta allora  $T$  accetta, se tutte rigettano allora  $T$  rigetta*, altrimenti
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di tre passi, ecc. ecc. ecc.
- ▶ Detto ciò, andate a studiarvi il Teorema 2.1 (dispensa 2, pag. 5-6)
- ▶ Noi, intanto, vediamo con qualche esempio come funziona questa tecnica di simulazione
- ▶ che prende il nome di *coda di rondine con ripetizioni*



# Simulare una computazione accettante

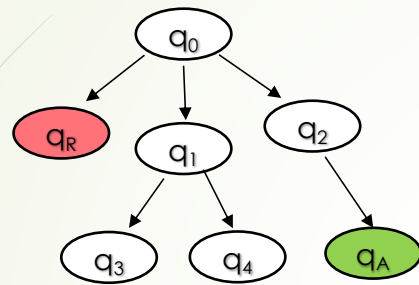


Computazione non deterministica  
che accetta in due *passi*

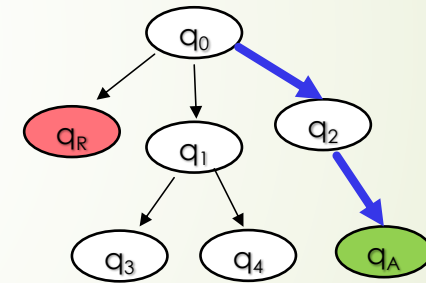
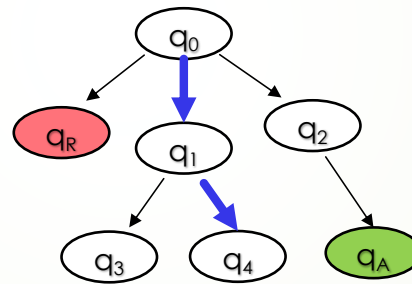
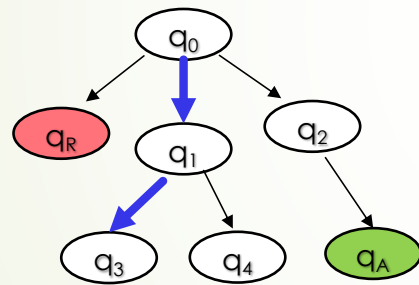


Simulazione delle tre computazioni deterministiche lunghe 1:  
nulla si può concludere circa l'accettazione o il rigetto

# Simulare una computazione accettante



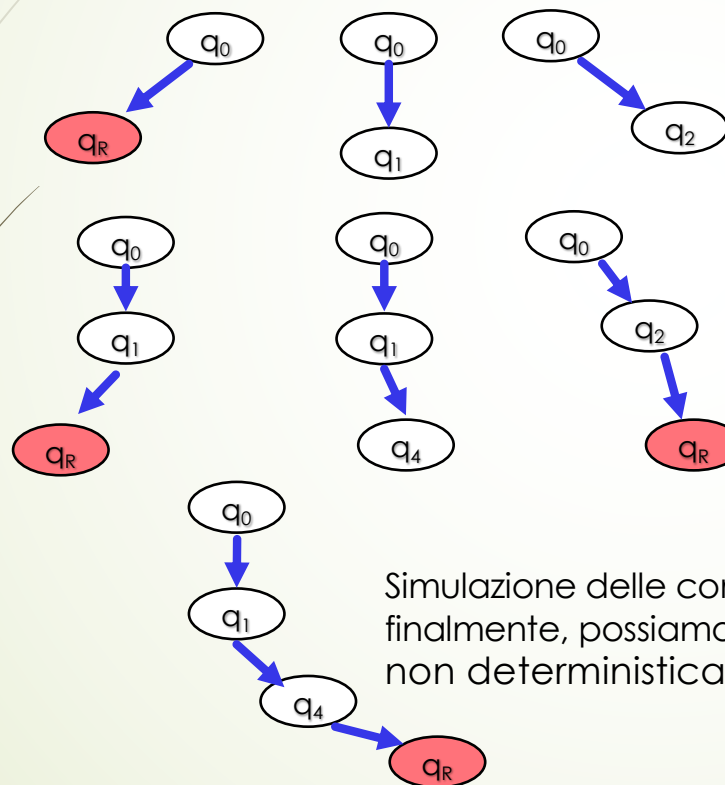
Computazione non deterministica  
che accetta in due *passi*



Simulazione delle tre computazioni deterministiche lunghe 2:  
la computazione che entra in  $q_R$  non viene ripetuta, e si può concludere circa  
l'accettazione solo al termine dell'ultima simulazione.  
Il passaggio attraverso gli stati globali contraddistinti da  $q_1$  e  $q_2$  si  
ripete più volte (coda di rondine con ripetizioni)

# Simulare una computazione che rigetta

- Questa volta, però, lavoriamo “al buio” – ossia, senza conoscere a priori la computazione non deterministica



Simulazione delle computazioni di lunghezza 1:  
nulla possiamo concludere

Simulazione delle computazioni di lunghezza 2:  
anche ora, nulla possiamo concludere

Simulazione delle computazioni di lunghezza 3:  
finalmente, possiamo concludere che la macchina  
non deterministica rigetta il suo input



# Determinismo e non determinismo

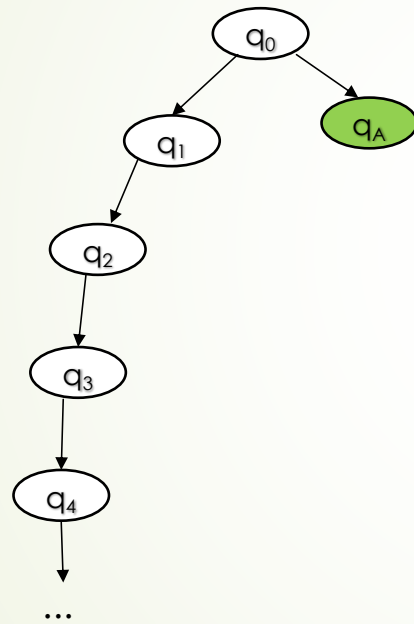
- ▶ Possiamo sempre costruire una macchina deterministica  $T$  che simula una macchina non deterministica  $NT$ : con input  $x$ 
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di un solo passo: se qualcuna accetta allora  $T$  accetta, se tutte rigettano allora  $T$  rigetta, altrimenti
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di due passi: se qualcuna accetta allora  $T$  accetta, se tutte rigettano allora  $T$  rigetta, altrimenti
  - ▶ simula tutte le computazioni deterministiche di  $NT(x)$  di tre passi, ecc. ecc. ecc.
- ▶ DOMANDINA: ma perché non possiamo far simulare a  $T$  prima l'intero ramo più a sinistra dell'albero, poi quello accanto, e così via?
  - ▶ la risposta alla prossima pagina...



# Computazioni che non terminano

- ▶ Perché alcune computazioni possono non terminare
  - ▶ ad esempio, se  $P$  contiene le due quintuple  $\langle q_1, a, a, q_2, D \rangle$  e  $\langle q_2, b, b, q_1, S \rangle$ , e la macchina si trova nello stato globale **zzzz q<sub>1</sub> abzzzz** (zzzz sono caratteri qualsiasi)
  - ▶ allora la computazione non termina (va in loop!)
- ▶ Allora, potrebbe accadere che la computazione deterministica più a sinistra di  $NT(x)$  non termini, mentre quella più a destra termini in  $q_A$ 
  - ▶ se simulassimo per prima la computazione non deterministica più a sinistra non termineremmo mai
  - ▶ e non riusciremmo mai a raggiungere lo stato  $q_A$
  - ▶ quindi, mentre  $NT(x)$  accetta, la nostra macchina deterministica non terminerebbe mai (ARGH!)
  - ▶ Invece, simulando ogni volta computazioni di lunghezza fissata, prima o poi arriveremo a beccare lo stato di accettazione nella computazione più a destra!
  - ▶ Capito il punto? (in figura alla prossima pagina)
  - ▶ Studiate il Teorema!

# Computazioni che non terminano



Quella illustrata in figura è una computazione non deterministica che accetta.

La computazione deterministica di sinistra non termina: se noi provassimo a simulare l'intera computazione di sinistra tale simulazione non avrebbe termine

perciò non riusciremmo mai ad iniziare la simulazione della computazione di destra e non raggiungeremmo mai lo stato di accettazione

Ecco perché si utilizza la tecnica della coda di rondine!



# Tanti modelli

- ▶ In conclusione, abbiamo visto tanti modelli di Macchine di Turing
  - ▶ dipendentemente dal numero di nastri di cui le dotiamo
  - ▶ e da come si muovono le testine
  - ▶ e da quanto è ricco l'alfabeto del quale dispongono
  - ▶ e dalla struttura dell'insieme delle quintuple (macchine deterministiche / non deterministiche)
- ▶ E abbiamo dimostrato che tutti questi modelli sono fra loro equivalenti
  - ▶ quello che sappiamo fare con una macchina "ricca" sappiamo farlo anche con una macchina "povera"
  - ▶ ossia, una macchina deterministica dotata di un solo nastro e che utilizza un alfabeto binario
- ▶ In effetti, tanti modelli calcolo sono stati definiti
  - ▶ e ciascuno di essi è stato dimostrato essere equivalente alla Macchina deterministica dotata di un solo nastro e che utilizza un alfabeto binario
- ▶ ma di questo parleremo più avanti...