Lezione 21 – NP-completezza

Lezione del 22/05/2024

Teorema di Cook-Levin e la struttura di NP

- La domanda era: **fra i problemi in NP che non si riesce a collocare in P, ce ne sono alcuni più "difficili" di altri?**
- Il **Teorema di Cook-Levin** ci dice che NP contiene un problema NP-completo
  - il problema SAT
- E, poiché sappiamo, che i problemi completi per una classe sono i problemi più "difficili" fra i problemi in quella classe
- Il **Teorema di Cook-Levin** ci dice che SAT è uno dei problemi più difficili in NP
  - perché sappiamo che se SAT appartenesse a P
  - allora ogni altro problema in NP apparterrebbe a P
  - perché, ricordiamo, P è chiusa rispetto alla riducibilià polinomiale
- Ma il **Teorema di Cook-Levin** ci dice molto di più!
- Facciamo un passo indietro

Il Teorema e la congettura

- Sappiamo della congettura P ≠ NP
  - e del milione di dollari sulla sua risoluzione
  - in positivo, o in negativo!
- Bene. Arriva qualcuno e dimostra che P = NP – *e lo fa descrivendo un algoritmo deterministico che decide SAT in tempo polinomiale*
- E allora? Nel senso: a cosa mi serve sapere che P = NP?
- Beh, se so che P = NP, sono certo che, comunque prendo un problema in NP, ***esiste*** un algoritmo (deterministico) che lo decide in tempo polinomiale
- Bello, per carità! Ma che ci faccio con l'***esistenza***?!
- … se io ho un problema importantissimo da decidere
  - e sono anni e anni che non riesco a progettare un algoritmo deterministico per deciderlo
  - però, riesco a dimostrare che quel problema è in NP
- A che mi serve sapere che, siccome è in NP e P = NP, un algoritmo deterministico polinomiale che lo decide ***esiste***, **se io un tale algoritmo non riesco a progettarlo?!**

Se sapessi che P = NP

- A che mi serve sapere che, siccome il mio problema è in NP e P = NP, un algoritmo deterministico polinomiale che lo decide ***esiste***, **se io un tale algoritmo non riesco a progettarlo?!**
- In realtà, il **teorema di Cook-Levin** fa molto di più che dimostrare che SAT è NP-completo
- La dimostrazione del teorema di Cook-Levin è *la descrizione di un algoritmo deterministico che trasforma le istanze di un qualunque problema in NP in istanze di SAT*
- Cerchiamo di capire:
- se abbiamo un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide SAT allora la dimostrazione del teorema di Cook-Levin ci mostra come **costruire** un algoritmo polinomiale che decide qualunque problema in NP
- Vediamo come

Se sapessi che P = NP

- **Supponiamo**, di avere un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide SAT
  - chiamiamolo T_{SAT}, e diciamo che, per ogni $y \in \{0,1\}^*$, $dtime(T_{SAT}, y) \leq |y|^k$ (per qualche costante k)
- Ho un problema decisionale Γ e dimostro che $\Gamma \in$ NP
  - cioè, progetto una macchina non deterministica NT_Γ che lo decide in tempo polinomiale
- Allora considero il seguente algoritmo: con input $x \in \{0,1\}^*$ (codifica di un'istanza di Γ)
  - FASE 1. Costruisce E(x) – come nella dimostrazione del teorema di Cook-Levin
  - FASE 2. Esegue $T_{SAT}(E(x))$: se termina in q_A allora accetta, altrimenti rigetta
- In virtù della dimostrazione del teorema di Cook-Levin, tale algoritmo decide L_Γ
- Inoltre, esso richiede tempo polinomiale in $|x|$, infatti:
  - La FASE 1, come sappiamo, richiede tempo polinomiale in $|x|$
  - La FASE 2 richiede tempo $|E(x)|^k$ – e E(x) ha lunghezza polinomiale in $|x|$
- Allora, abbiamo costruito un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide Γ!
  - **Nell'ipotesi di avere un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide SAT**

Il teorema e la congettura

- Quindi, **se si dimostrasse che P = NP**
  - **e se si trovasse un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide SAT**
- il teorema di Cook-Levin ci permetterebbe di **costruire** un algoritmo deterministico polinomiale per decidere qualunque problema in NP

- **Ma se, invece, si dimostrasse che P ≠ NP ?**
- Allora, sapremmo che SAT ∉ P
- E, ogni volta che riuscissimo a dimostrare che un problema è NP-completo
- sapremmo che quel problema non è in P!
- Ossia, i problemi NP-completi sono i problemi separatori fra P e NP, nell'ipotesi **P ≠ NP**

- Certo che, se per dimostrare che un problema è NP-completo, dovessimo, ogni volta, ripetere una dimostrazione come quella di Cook-Levin…
- Per fortuna, abbiamo uno strumento che ci aiuta

Da problema a problema

- Per fortuna, abbiamo uno strumento che ci aiuta – il teorema 9.3
- Prima di vedere questo strumento, però, una precisazione è d'uopo: nella dispensa 6 abbiamo parlato di riducibilità fra linguaggi
  - Ora, però, stiamo studiando la classe NP relativamente a problemi decisionali
- Dati due problemi decisionali Γ e Λ quando è che $\Gamma \preccurlyeq \Lambda$?
- Facile, quando $L_\Gamma \preccurlyeq L_\Lambda$
  - dove L_Γ e L_Λ sono i linguaggi associati alle codifiche ragionevoli delle istanze sì dei due problemi
- Allora **$\Gamma \preccurlyeq \Lambda$** se esiste una funzione $f: \mathfrak{I}_\Gamma \to \mathfrak{I}_\Lambda$ tale che
  - **$f \in FP$**
  - **x è una istanza sì Γ di se e soltanto se f(x) è una istanza sì di Λ**
- Per semplicità, d'ora in poi scriveremo **$x \in \Gamma$** per intendere "**x è una istanza sì Γ**"

Da problema a problema

- **Teorema 9.3**: Sia Γ un problema in NP.
  Se esiste un problema NP-completo riducibile a Γ allora Γ è NP- completo.

- Sia Λ un problema NP-completo tale che $\Lambda \preccurlyeq \Gamma$.
- Poiché $\boldsymbol{\Lambda \preccurlyeq \Gamma}$,
  - esiste una funzione f : $\Im_\Lambda \rightarrow \Im_\Gamma$ tale che f ∈ FP e
  - per ogni y ∈ $\Im_\Lambda$, y ∈ Λ se e soltanto se f(y) ∈ Γ .
- Poiché $\boldsymbol{\Lambda}$ **è NP-completo**, per ogni problema Δ ∈ NP, si ha che $\Delta \preccurlyeq \Lambda$:
  - esiste una funzione g : $\Im_\Delta \rightarrow \Im_\Lambda$ tale che g ∈ FP e,
  - per ogni x ∈ $\Im_\Delta$, x ∈ Δ se e soltanto se g(x) ∈ Λ .
- La composizione delle due funzioni g e f è una riduzione polinomiale da Δ a Γ:
  - sia x ∈ $\Im_\Delta$: allora, **x ∈ Δ se e soltanto se** g(x) ∈ Λ e,
  - inoltre, g(x) ∈ Λ se e soltanto se **f (g(x)) ∈ Γ**
  - allora. se chiamiamo h la composizione delle funzioni g e f, questo dimostra che h è una riduzione da Δ a Γ.

Da problema a problema

- Ma quanto costa calcolare h?
- **g ∈ FP**: allora esistono un trasduttore T_g e una costante k ∈ N tali che, per ogni x ∈ $\Im_\Delta$, $T_g(x)$ calcola g(x) e $dtime(T_g , x) \leq |x|^k$
  - poiché $T_g(x)$ deve anche scrivere il risultato g(x) sul nastro di output, allora $|g(x)| \leq |x|^k$
- **f ∈ FP**: allora esistono un trasduttore T_f e una costante c ∈ N tali che, per ogni y ∈ $\Im_\Lambda$, $T_f(y)$ calcola f(y) e $dtime(T_f , y) \leq |y|^c$
- Definiamo il trasduttore T_h , a tre nastri, che calcola h: con x ∈ $\Im_\Delta$ scritto sul primo nastro, T_h
  - 1) esegue la computazione $T_g(x)$ scrivendo il suo output y = g(x) sul secondo nastro;
  - 2) esegue la computazione $T_f(y)$ scrivendo il suo output f(y) sul nastro di output.
- Per ogni x ∈ $\Im_\Delta$ $\quad$ **$dtime(T_h,x) \leq |x|^k + |g(x)|^c \leq |x|^k + |x|^{kc} \leq 2|x|^{kc}$**
  e ciò dimostra che **h ∈ FP**.
- Quindi, abbiamo dimostrato che $\Delta \preccurlyeq \Gamma$,
- poiché Δ è un qualunque problema in NP, questo prova che ogni problema in NP è riducibile polinomialmente a Γ.
- Dall'appartenenza di Γ a NP segue che Γ è NP-completo.

Da problema a problema

- Alla luce del **teorema 9.3**, per dimostrare che un problema **Γ è NP-completo** è sufficiente
  - mostrare che Γ è contenuto in NP
  - scegliere un problema NP-completo noto Λ e dimostrare che $\Lambda \preccurlyeq \Gamma$
- E, in effetti, in seguito al **teorema di Cook-Levin**
  - e utilizzando il **teorema 9.3**
- è stata dimostrata la NP-completezza di numerosissimi problemi
- E noi di queste dimostrazioni ne vedremo diverse
  - a partire da oggi

Il problema 3SAT

- Abbiamo già incontrato il problema 3SAT, che qui ricordiamo:
- dati un insieme X di variabili booleane ed un predicato f, definito sulle variabili in X e contenente i soli operatori $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, decidere se esiste una assegnazione a di valori in {vero, falso} alle variabili in X tale che f(a(X))=vero
- Consideriamo soltanto predicati f in forma 3-congiuntiva normale (3CNF), ossia,
  - f è la congiunzione di un certo numero di clausole: $f = c_1 \wedge c_2 \ldots \wedge c_m$
  - e ciascuna c_j è la disgiunzione ($\vee$) di tre letterali, ad esempio $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
  - (un letterale è una variabile o una variabile negata)
- Questo problema prende il nome di 3SAT, ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{3SAT}} = \{ \langle X, f \rangle : X$ è un insieme di variabili booleane $\wedge$ f e un predicato su X in 3CNF$\}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{3SAT}}(X, f) = \{ a: X \rightarrow \{vero, falso\} \}$ (è l'insieme delle assegnazioni di verità alle variabili in X)
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{3SAT}}(X, f, \mathbf{S}_{\mathbf{3SAT}}(X,f)) = \exists\, a \in \mathbf{S}_{\mathbf{3SAT}}(X,f) : f(a(X)) =$ vero
- Non può non balzare all'occhio la sua somiglianza con SAT…
  - sono quasi uguali!

Il problema 3SAT

- Non può non balzare all'occhio la somiglianza di 3SAT con SAT
- Formalmente:
  - $\mathfrak{I}_{3SAT} \subseteq \mathfrak{I}_{SAT}$
  - $\mathbf{S}_{3SAT}(X, f) = \mathbf{S}_{SAT}(X, f)$
  - $\boldsymbol{\pi}_{3SAT}(X, f, \mathbf{S}_{3SAT}(X,f)) = \boldsymbol{\pi}_{3AT}(X, f, \mathbf{S}_{SAT}(X,f))$
- Per questa ragione diciamo che 3SAT è una **restrizione** di SAT
- Sappiamo già che 3SAT ∈ NP
- Ma non sappiamo se 3SAT è NP-completo
  - la restrizione che impone che tutte le clausole contengano 3 letterali potrebbe rendere il problema più semplice rispetto alla versione in cui le clausole contengono quanti letterali gli pare…
  - Magari, proprio il fatto di avere clausole con 3 letterali può essere la chiave per trovare un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide 3SAT
  - come accade per 2SAT (si veda dispensa 8)…

3SAT è NP-completo

- Siamo al paragrafo 9.5.1
- Dimostriamo che 3SAT è NP-completo
  - già sappiamo che 3SAT ∈ NP
  - per dimostrarne la completezza per NP, utilizziamo il teorema 9.3
  - ci basta scegliere un altro problema, che già sappiamo essere NP-completo, e **ridurlo a** 3SAT
- Visto che, al momento, conosciamo un solo problema NP-completo, la scelta non è difficile…
- Riduciamo, dunque, SAT a 3SAT:
- sia $\langle X, f \rangle$ un'istanza di SAT, con $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ e $f = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$
  - dove ciascuna clausola c_i è la disgiunzione di un certo numero di letterali
  - ossia, tante variabili, eventualmente negate, collegate da V
- dobbiamo trasformare $\langle X, f \rangle$ in un'istanza di 3SAT $\langle X', f' \rangle$ in modo tale che

f è soddisfacibile se e soltanto se f' è soddisfacibile

3SAT è NP-completo

- sia $\langle X, f \rangle$ un'istanza di SAT, con $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ e $f = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$
  - dove ciascuna clausola c_i è la disgiunzione di un certo numero di letterali
  - ossia, tante variabili, eventualmente negate, collegate da V
- dobbiamo trasformare $\langle X, f \rangle$ in un'istanza di 3SAT $\langle X', f' \rangle$ in modo tale che
  f è soddisfacibile se e soltanto se f' è soddisfacibile
- Procediamo in questo modo:
  - consideriamo una clausola c_j di f alla volta
  - prendiamo c_j e la trasformiamo nella congiunzione D_j di un insieme di clausole di f'
  - eventualmente, aggiungendo nuove variabili (non contenute in X) che faranno parte di un insieme Y
  - dove la struttura di D_j dipende dal numero di letterali di c_j
  - e dimostriamo che **se esiste una assegnazione di verità per X che soddisfa c_j allora è possibile assegnare un valore di verità alle variabili in Y in modo tale che tutte le clausole in D_j sono soddisfatte**
  - mentre **se nessuna assegnazione di verità per X soddisfa c_j allora non è possibile assegnare un valore di verità alle variabili in Y $\cup$ X in modo tale che tutte le clausole in D_j siano soddisfatte**

3SAT è NP-completo

- Caso 1: c_j contiene 1 letterale, ossia $c_j = \ell$, con $\ell = x_i$ o $\ell = \neg x_i$
- allora $D_j = (\ell \vee y_{j1} \vee y_{j2}) \wedge (\ell \vee \neg y_{j1} \vee y_{j2}) \wedge (\ell \vee y_{j1} \vee \neg y_{j2}) \wedge (\ell \vee \neg y_{j1} \vee \neg y_{j2})$
  - dove y_{j1} e y_{j2} sono due nuove variabili – ossia, y_{j1} , $y_{j2} \notin X$
  - se a ℓ viene assegnato valore **vero**, allora D_j assume valore **vero** *qualunque valore di verità si assegni a y_{j1} e y_{j2}*
  - invece, se a ℓ viene assegnato valore **falso**, allora D_j assume valore **falso** *qualunque valore di verità si assegni a y_{j1} e y_{j2}*
    - qualunque assegnazione di verità a y_{j1} e y_{j2} rende falsa una delle clausole in D_j
- Caso 2: c_j contiene 2 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2$,
- allora $D_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_j) \wedge (\neg y_j \vee \ell_1 \vee \ell_2)$
  - dove y_j è una nuova variabile – ossia, $y_j \notin X$
  - se viene assegnato valore **vero** a ℓ_1 oppure a ℓ_2 allora D_j assume valore **vero** *qualunque valore di verità si assegni a y_j*
  - se viene assegnato valore **falso** sia a ℓ_1 che a ℓ_2 allora D_j assume valore **falso** *qualunque valore di verità si assegni a y_j*

3SAT è NP-completo

- Caso 3: c_j contiene 3 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$,
- allora $D_j = c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$,
  - è il caso più facile!

- Caso 4: c_j contiene 4 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4$,
- allora $D_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \mathbf{y_j}) \wedge (\neg \mathbf{y_j} \vee \ell_3 \vee \ell_4)$
  - dove y_j è una nuova variabile – ossia, $y_j \notin X$
  - se viene assegnato valore **vero** a ℓ_1 , oppure a ℓ_2 , oppure a ℓ_3 , oppure a ℓ_4 allora **esiste una assegnazione di verità a y_j che fa assumere a D_j valore vero**
  - se viene assegnato valore **falso** sia a ℓ_1 che a ℓ_2 che a ℓ_3 che a ℓ_4 allora D_j assume valore **falso** ***qualunque valore di verità si assegni a y_j***

- Caso 5: c_j contiene 5 letterali, ossia $c_j = \mathbf{\ell_1} \vee \mathbf{\ell_2} \vee \ell_3 \vee \ell_4 \vee \ell_5$,
- allora $D_j = (\mathbf{\ell_1} \vee \mathbf{\ell_2} \vee y_{j1}) \wedge (\neg y_{j1} \vee \ell_3 \vee y_{j2}) \wedge (\neg y_{j2} \vee \ell_4 \vee \ell_5)$

3SAT è NP-completo

- Caso 6: c_j contiene 6 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 \vee \ell_5 \vee \ell_6$,
- allora $D_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_{j1}) \wedge (\neg y_{j1} \vee \ell_3 \vee y_{j2}) \wedge (\neg y_{j2} \vee \ell_4 \vee y_{j3}) \wedge (\neg y_{j3} \vee \ell_5 \vee \ell_6)$
- Caso … capito il gioco?

- Caso generico: c_j contiene h letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_h$,
- allora $D_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_{j1}) \wedge (\neg y_{j1} \vee \ell_3 \vee y_{j2}) \wedge (\neg y_{j2} \vee \ell_4 \vee y_{j3}) \wedge (\neg y_{j3} \vee \ell_5 \vee y_{j4}) \wedge \ldots \wedge (\neg y_{jh-4} \vee \ell_{h-2} \vee y_{jh-3}) \wedge (\neg y_{jh-3} \vee \ell_{h-1} \vee \ell_h)$
  - dove $y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jh-3}$ sono nuove variabile – ossia, non appartengono a X
  - se viene assegnato valore **vero** a ℓ_1 , oppure a ℓ_2 , … , oppure a ℓ_h allora **esiste una assegnazione di verità alle variabili $y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jh-3}$** che fa assumere a D_j valore **vero**
  - se viene assegnato valore **falso** sia a ℓ_1 che a ℓ_2 … che a ℓ_h allora D_j assume valore **falso** ***qualunque valore di verità si assegni a $y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jh-3}$***
  - infatti: per soddisfare $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_{j1})$ occorre assegnare a y_{j1} il valore **vero**, da cui segue che occorre assegnare a y_{j2} il valore **vero**, … , da cui segue che occorre assegnare a y_{jh-3} il valore **vero**, ma, a questo punto $(\neg y_{jh-3} \vee \ell_{h-1} \vee \ell_h)$ assume il valore **falso**!

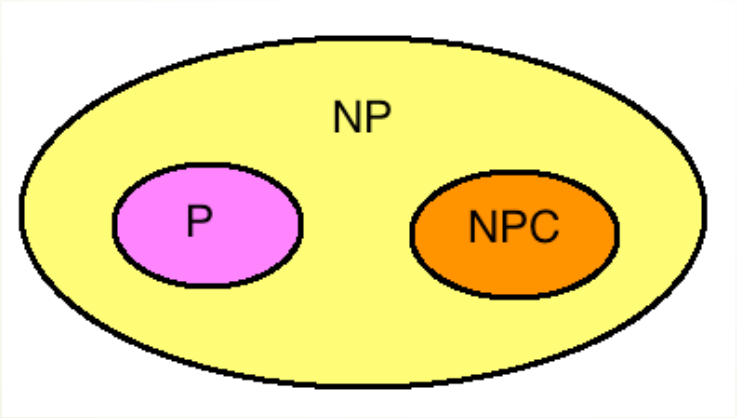
3SAT è NP-completo

- Ricapitolando: abbiamo costruito un'istanza $\langle X', f' \rangle$ di 3SAT a partire da un'istanza $\langle X, f \rangle$ di SAT
  - se $f = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ allora $f' = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$, e $X' = X \cup Y$
- e (passo passo) abbiamo dimostrato che f è soddisfacibile se e soltanto se f' è soddisfacibile
  - perché abbiamo dimostrato che **la soddisfacibilità di D_j non dipende dai valori di verità che assegniamo alle variabili in Y**
- e, poiché occorre tempo polinomiale in $| \langle X, f \rangle |$ per costruire $\langle X', f' \rangle$
  - perché per costruire ciascuna D_j occorrono $O(|X|)$ passi
  - e devono essere costruite $O(|f|)$ congiunzioni di clausole D_j
- abbiamo dimostrato che 3SAT è NP-completo

La struttura di NP

- A partire dal teorema di Cook-Levin
  - che ha individuato in SAT il capostipite dei problemi NP-completi
- ed utilizzando il teorema 9.3
- uno dopo l'altro sono stati individuati tanti, tantissimi, problemi NP-completi
  - una miriade di problemi NP-completi!
  - e ne vedremo un po' nel corso delle prossime lezioni
- A questo punto, la domanda sorge spontanea: e chi ce lo dice che tutti i problemi in NP non sono altrettanto "difficili" di SAT?
- Ossia: non sarà, magari, che tutti i problemi in NP sono NP-completi?
- Beh, insomma, questa questione va almeno posta diversamente, perché, ricordiamo, **P ⊆ NP**
- e, quindi, **se crediamo che sia P ≠ NP**, **almeno i problemi in P** che appartengono anch'essi a NP **non possono essere NP completi!**
  - Altrimenti, per il corollario 6.4 sarebbe P = NP

La struttura di NP

- Allora, dobbiamo riformulare la nostra domanda: **se crediamo che sia P ≠ NP**, non sarà, magari, che tutti i problemi in NP-P sono NP-completi?
- La risposta è no, e a dimostrarlo è il seguente
- **Teorema di Ladner: se P ≠ NP allora esiste un problema in NP-P che non è NP-completo**
  - la (bellissima) dimostrazione del teorema di Ladner non la studiamo
- Allora, **nell'ipotesi P ≠ NP,** alla luce del teorema di Cook-Levin e del teorema di Ladner, la struttura della classe NP, è quella illustrata nella seguente figura
  - 

NPC contiene i problemi NP-completi

ATTENZIONE!!!!

- I problemi in NP-P che non sono NP-completi si dicono **NP-intermedi**
- Come si fa a dimostrare che un problema è NP-intermedio?
- Risposta: non si fa!
- Perché, se si dimostrasse che un problema è NP-intermedio questo vorrebbe dire che si sarebbe dimostrato che quel teorema è in NP-P
- ossia, si sarebbe dimostrato che **P ≠ NP**
  - **e vinto il milione di dollari**
- Chiaro il punto?
- **Perciò: se avete un problema che dimostrate che appartiene a NP**
  - **ma non riuscite a deciderlo mediante un algoritmo (deterministico) polinomiale**
  - **e non riuscite nemmeno a dimostrare che è NP-completo**
- **non vi venga in mente di concludere che quel problema è NP-intermedio!**

La struttura di NP e coNP

- La seconda congettura della teoria della complessità afferma che NP ≠ coNP
- Ricordando il **teorema 6.25** che ci dice che:

un linguaggio L è NP-completo se e soltanto se
il suo complemento L^c è coNP-completo

- e che, quindi, esistono sia problemi coNP-completi che coNP-intermedi
- e ricordando che, poiché P = coP, allora P ⊆ coNP
- possiamo riassumere la struttura delle classi P, NP e coNP nella seguente figura