Lezione 22 - prove di NP-completezza

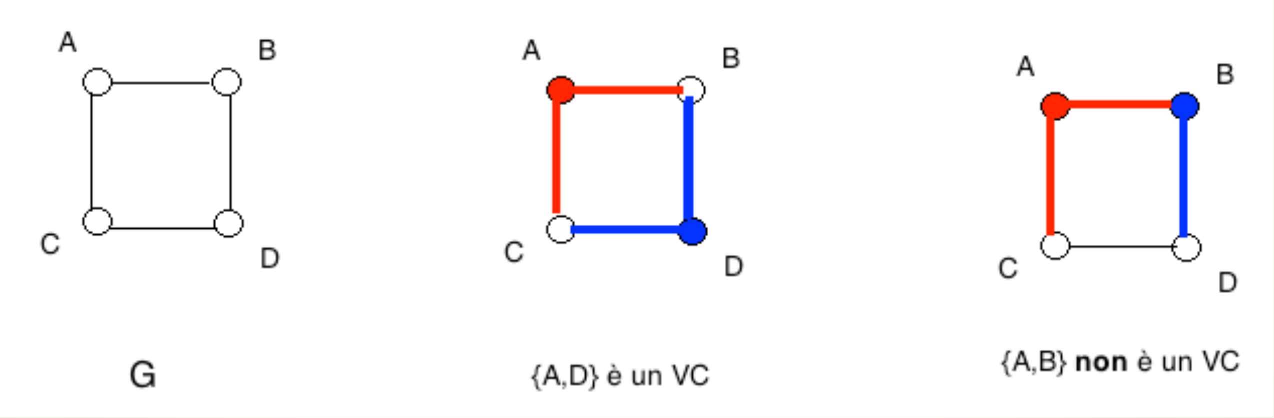
Lezione del 28/05/2024

Dimostrazioni di NP-completezza

- Lezione prettamente tecnica
  - pressoché una esercitazione
- Vediamo un po' di esempi di applicazione del teorema 9.3 per dimostrare la NP-completezza di problemi
- Vedremo, in particolare, come dalla NP-completezza di 3SAT discenda la NP-completezza di un nuovo problema: Vertex Cover
- e come dalla NP-completezza di Vertex Cover discenda la NP-completezza di
  - Independent Set
  - Clique
  - Dominating set

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), un sottoinsieme V' di nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme è un ***vertex cover*** di G
- Un vertex cover è un insieme di nodi che "copre" tutti gli archi del grafo



- Nel problema Vertex Cover vogliamo trovare un sottoinsieme di nodi "piccolo" che copra tutti gli archi di un grafo

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme V'di V di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in V'?
- Questo problema prende il nome di Vertex Cover (VC, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge \ k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V\}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G,k)) = \exists V' \in \mathbf{S}_{VC}(G,k) : |V'| \leq k \ \wedge \forall (u,v) \in E \ [\ u \in V' \ \vee \ v \in V' \ ]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di VC, è dimostrare che VC $\in$ NP
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
  - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - ed è quello che ci accingiamo a fare insieme

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
  - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V\}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G,k)) = \exists\, V' \in \mathbf{S}_{VC}(G,k) : |V'| \leq k \wedge \forall (u,v) \in E\ [\ u \in V' \vee v \in V'\ ]$

- Dimostriamo che VC ∈ NP mostrando che ogni sua istanza sì ha un certificato che sia verificabile in tempo deterministico polinomiale
  - Un certificato è un sottoinsieme V' di V
  - per verificare che V' è effettivamente un Vertex Cover per G, ossia che V' soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G,k))$, dobbiamo esaminare ciascun arco (u,v) di G e verificare che $u \in V'$ o $v \in V'$
  - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|E|\ |V|)$
  - ossia, in tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), k \rangle|$

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
  - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G,k)) = \exists\, V' \in \mathbf{S}_{VC}(G,k) : |V'| \leq k \wedge \forall\, (u,v) \in E\, [\, u \in V' \vee v \in V'\,]$

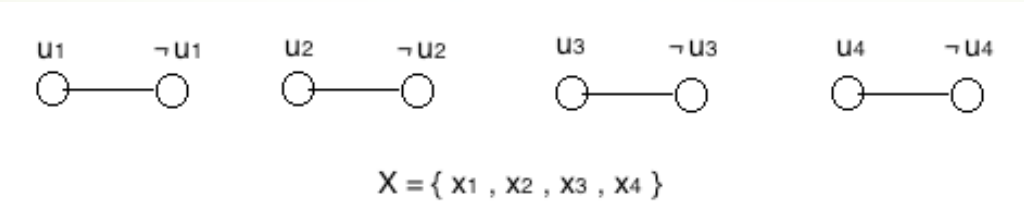
- Dimostriamo che VC è completo per NP riducendo polinomialmente 3SAT a VC
- ossia, mostriamo che 3SAT $\preccurlyeq$ VC
- Ricordiamo, ancora una volta, 3SAT:
  - una istanza di 3SAT è una coppia $\langle X, g \rangle$
  - in cui g è una espressione booleana in 3CNF nelle variabili in X
  - ossia, $g = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$ e $c_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3})$ e $\ell_{jh} \in X$ oppure $\neg\, \ell_{jh} \in X$
  - e occorre decidere se esiste una assegnazione a di valori di verità alle variabili in X tale che $g(\, a(X)\,) =$ **vero**

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dimostriamo che VC è completo per NP dimostrando che 3SAT $\preccurlyeq$ VC
- Ossia, dobbiamo mostrare come trasformare un'istanza $\langle X,g \rangle$ di 3SAT in un'istanza $\langle G=(V,E),k \rangle$ di VC in modo tale che
  - g è soddisfacibile se e soltanto se G ha un vertex cover di k nodi
  - data $\langle X,g \rangle$, calcoliamo $\langle G=(V,E),k \rangle$ in tempo polinomiale in $|\langle X,g \rangle|$
- Neanche a dirlo, le istanze dei due problemi sono molto diverse!
- Per eseguire la trasformazione utilizzeremo una tecnica cui faremo spesso riferimento anche in seguito quando vogliamo ridurre un problema A ad un problema B:
- ad ogni ***struttura*** dell'istanza di A
  - vedremo a breve per mezzo di esempi cosa intendiamo con questo termine
- faremo corrispondere una ***struttura*** dell'istanza di B,
- in modo che strutture dello stesso genere presenti nell'istanza di A corrispondano a strutture dello stesso genere dell'istanza di B.
- A tali strutture daremo il nome di **gadget**.

Il problema Vertex Cover (VC)

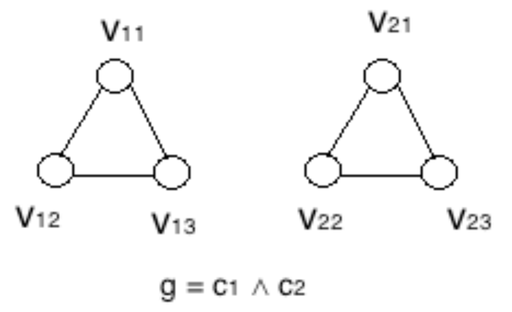
- Le *strutture* che compongono un'istanza ⟨ X,g ⟩ di 3SAT sono di due tipi:
  - variabili
  - clausole
- Trasformiamo ciascuna variabile in X in un arco – ossia, il **gadget-variabile** è P_2
  - il gadget-variabile della variabile x_i è l'arco (u_i , ¬ u_i)
  - **gadget-variabile associati a variabili diverse non hanno nodi in comune**



- Scegliendo un nodo in ogni gadget-variabile otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo
- Se in un gadget-variabile non scegliamo alcun nodo, non copriamo quell'arco!
- Allora, un Vertex Cover *minimo* di questa porzione di grafo ha cardinalità |X|
  - ossia, |X| nodi sono sufficienti, ma con meno di |X| nodi qualche arco rimane scoperto

Il problema Vertex Cover (VC)

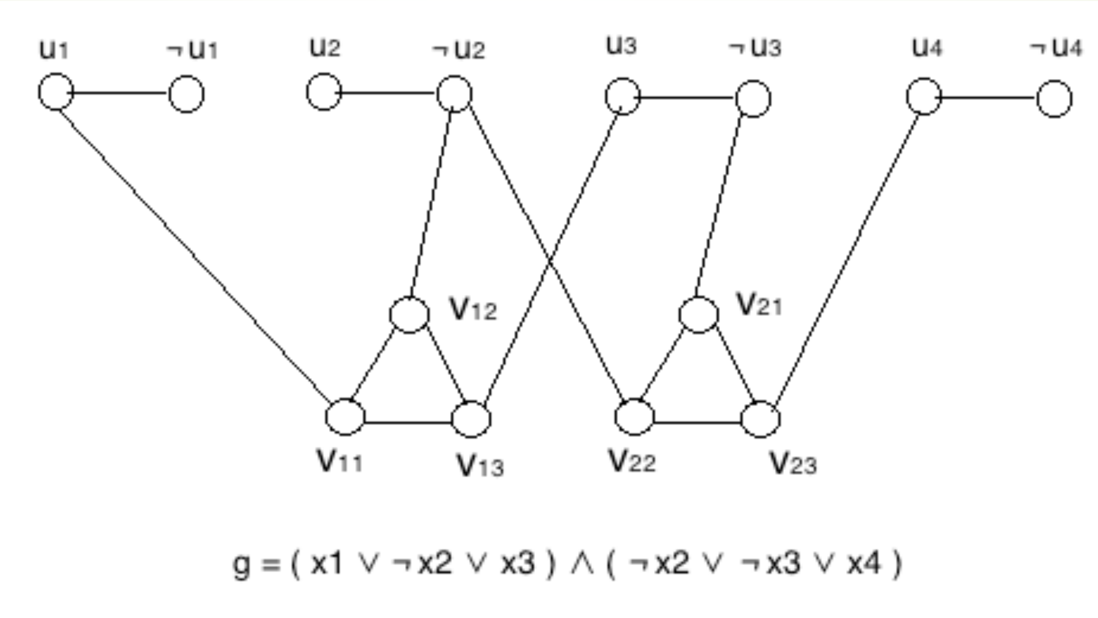
- Trasformiamo ciascuna clausola in g in un ciclo di 3 nodi – ossia, il **gadget-clausola** è C_3
  - il gadget-clausola della clausola c_j è la terna di archi (v_{j1}, v_{j2}), (v_{j2}, v_{j3}), (v_{j3}, v_{j1}),
  - **gadget-clausola associati a clausole diverse non hanno nodi in comune**
  - **gadget-clausola e gadget-variabile non hanno nodi in comune**



- Scegliendo due nodi in ogni gadget-clausola otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo
- Se in un gadget-clausola scegliamo meno di due nodi, non copriamo quel gadget!
- Allora, un Vertex Cover *minimo* di questa porzione di grafo ha cardinalità $2|g| = 2m$
  - ossia, 2m nodi sono sufficienti, ma con meno di 2m nodi qualche arco rimane scoperto

Il problema Vertex Cover (VC)

- Ora dobbiamo collegare i gadget-clausola con i gadget-variabile
- E per farlo utilizziamo il modo in cui sono composte le clausole
  - colleghiamo ciascun nodo in ciascun gadget-clausola al nodo-variabile che gli corrisponde
  - ad esempio, se $c_j = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ creiamo gli archi "**obliqui**" (v_{j1}, u_1), $(v_{j2}, \neg u_2)$, (v_{j3}, u_3)



Il problema Vertex Cover (VC)

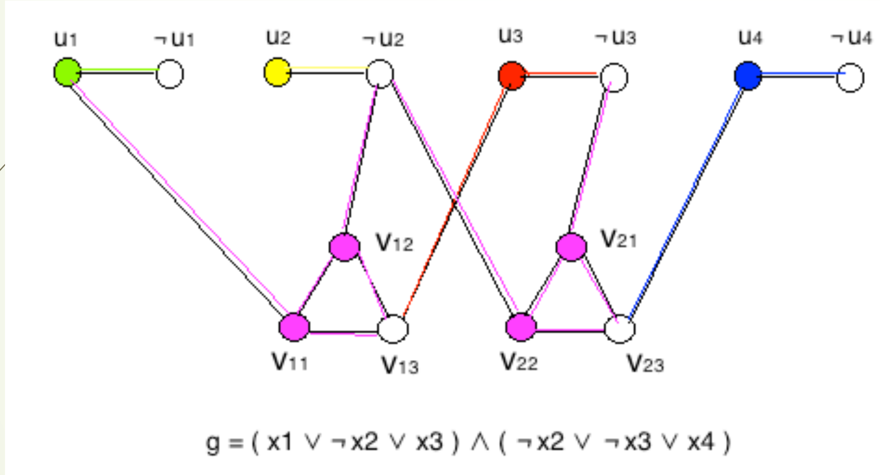
- E così, abbiamo costruito il grafo G corrispondente a ⟨ X,g ⟩
- per completare l'istanza ⟨ G,k ⟩ di VC corrispondente a ⟨ X,g ⟩ scegliamo
  $k = |X| + 2|g| = n + 2m$
- Banalmente, costruire ⟨ G,k ⟩ da ⟨ X,g ⟩ richiede tempo polinomiale in |⟨ X,g ⟩|
  - provate a verificarlo per esercizio
- Resta da mostrare che g è soddisfacibile se e soltanto se G ha un vertex cover di al più k= n + 2m nodi
- Prima di procedere con questa dimostrazione, ricordiamo che
  - come abbiamo già osservato
- n nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-variabile e 2m nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-clausole
- perciò, almeno **k = n + 2m nodi sono necessari** per coprire gli archi di G
- resta da far vedere che **k = n + 2m nodi sono <u>sufficienti</u> a coprire gli archi di G se e soltanto se g è soddisfacibile**

Il problema Vertex Cover (VC)

- **Se g è soddisfacibile**, costruiamo l'insieme V' nel modo seguente:
  - sia **a** : X → {**vero**, **falso**} una assegnazione di verità che soddisfa g
  - ossia, per ogni j = 1, … , m, **a** assegna il valore vero ad almeno uno dei letterali nella clausola $c_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3})$: cioè, $\mathbf{a}(\ell_{j1})$ = **vero** oppure $\mathbf{a}(\ell_{j2})$ = **vero** oppure $\mathbf{a}(\ell_{j3})$ = **vero**
- 1) inseriamo in V' n nodi dei gadget-variabile: per i = 1, … , n = |X|, inseriamo in V' il nodo u_i se $\mathbf{a}(x_i)$ = **vero** , il nodo $\neg u_i$ se $\mathbf{a}(x_i)$ = **falso**
- 2) per ogni j = 1, … , m, scegliamo un letterale ℓ_{jh} (h=1, o h=2, 0 h=3) nella clausola c_j al quale è stato assegnato valore **vero** da **a** e inseriamo in V' i due nodi del gadget-clausola associato a c_j che non sono v_{jh}
  - ad esempio, se $\mathbf{a}(x_3)$ = **vero** e $c_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ e scegliamo ℓ_{j3}, allora inseriamo in V' i nodi v_{11} e v_{12}
- ogni arco nei gadget-variabile ha un estremo in V'
- per ogni j = 1, … , m, V' contiene due nodi del gadget-clausola associato a c_j: pertanto, tutti gli archi nei gadget-clausola sono coperti
- per ogni j = 1, … , m, non abbiamo inserito in V'un solo nodo che è collegato ad un nodo-variabile che appartiene a V': perciò, tutti gli archi obliqui sono coperti

Il problema Vertex Cover (VC)

- Quindi i nodi in V' coprono tutti gli archi di G:
  - in figura è mostrato un vertex cover (i nodi colorati) corrispondente all'assegnazione **a**(x_1) = **a**(x_2) = **a**(x_3) = **a**(x_4) = **vero** e la corrispondente copertura degli archi



- | V' | = n + 2m
- Quindi: **se g è soddisfacibile, allora G contiene un Vertex Cover di k (= n + 2m) nodi**

Il problema Vertex Cover (VC)

- Viceversa: **se G contiene un Vertex Cover V' di k (= n + 2m) nodi allora**
  - V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile
  - V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola
- Poiché V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile, consideriamo la seguente assegnazione di verità a per le variabili in X:
  - $a(x_i)$ = **vero** se $u_i \in V'$
  - $a(x_i)$ = **falso** se $\neg u_i \in V'$
- Poiché V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola, allora un arco "obliquo" in ogni gadget clausola non è coperto dai nodi in V' del gadget-clausola
- Allora, per ogni gadget clausola un arco "obliquo" è coperto da un nodo di un gadget-variabile contenuto in V'
  - ossia, da un nodo u_i – e quindi quella clausola contiene x_i come letterale e $a(x_i)$ = **vero**
  - oppure da un nodo $\neg u_i$ – e quindi quella clausola contiene $\neg x_i$ come letterale e $a(x_i)$ = **falso**
- Questo significa che ogni clausola contiene un letterale al quale **a** assegna valore **vero**
- e quindi **g è soddisfacibile**!

Il problema Independent Set (IS)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), un sottoinsieme di nodi tale che nessuna coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco è un ***insieme indipendente*** per G
- **Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero k ∈ ℕ, esiste un insieme indipendente per G di almeno k nodi?**
- Questo problema prende il nome di **Independent Set** (**IS**, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
  - $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G,k)) = \exists\, I \in \mathbf{S}_{IS}(G,k) : |I| \geq k \wedge \forall\, u,v \in I\, [\, (u,v) \notin E\,]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di IS, è dimostrare che IS ∈ NP
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
  - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
  - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\ k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G,k)) = \exists\, I \in \mathbf{S}_{IS}(G,k) : |\, I \,| \geq k \ \wedge \forall\, u,v \in I\ [\ (u,v) \notin E\ ]$

- Dimostriamo che IS ∈ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - Un certificato è un sottoinsieme I di V
  - per verificare che I è effettivamente un insieme indipendente per G, ossia che I soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G,k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi u,v in I e verificare che $(u,v) \notin E$
  - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2|E|)$
  - ossia, in tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), k \rangle|$

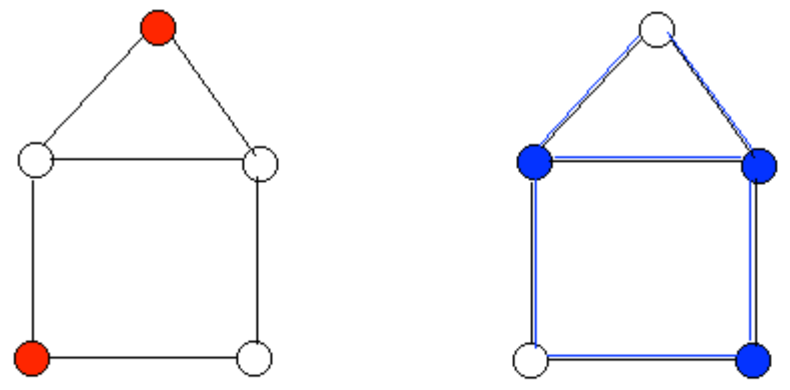
Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
  - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
  - $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G,k)) = \exists\, I \in \mathbf{S}_{IS}(G,k) : |\, I \,| \geq k \;\wedge \forall\, u,v \in I\, [\; (u,v) \notin E\,]$
- Dimostriamo che IS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a IS
  - ossia, dimostriamo che VC $\preccurlyeq$ IS
- e, questa volta, la riduzione è poco più che una osservazione…
- Perché è sufficiente osservare che

un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se V'= V – I è un vertex cover per G

Il problema Independent Set (IS)

- Dato un grafo G=(V,E), un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G
  - se $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G allora, per ogni arco (u,v) E accade che $u \notin I$ oppure $v \notin I$ - ossia, $u \in V'$ oppure $v \in V'$, cioè V' è un vertex cover per G
  - se $V' \subseteq V$ è un vertex cover per G allora, per ogni arco (u,v) E accade che $u \in V'$ oppure $v \in V'$ - ossia, $u \notin I$ oppure $v \notin I$, cioè I è un insieme indipendente per G



Un insieme indipendente e il suo complemento: un vertex cover

Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
  - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
  - $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G,k)) = \exists I \in \mathbf{S}_{IS}(G,k) : | I | \geq k \wedge \forall u,v \in I [(u,v) \notin E]$

- Dimostriamo che IS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a IS
  - osservando che **un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G**

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G=(V,E), |V|-k \rangle$ di IS
  - in cui il grafo rimane invariato!
- G ha un vertex cover V' di $\leq$ k nodi se e soltanto se G ha un insieme indipendente I=V-V' di $\geq |V| - k$ nodi
- e calcolare $\langle G=(V,E), |V|-k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $\langle G=(V,E), k \rangle$

Il problema Clique (CL)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), un sottoinsieme di nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco è un ***grafo completo*** (***clique***) per G
- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?
- Questo problema prende il nome di Clique (CL, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{CL} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{CL}(G, k) = \{ C \subseteq V\}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{CL}(G, k, \mathbf{S}_{CL}(G,k)) = \exists\, C \in \mathbf{S}_{CL}(G,k) : |C| \geq k \wedge \forall\, u,v \in C\, [\ (u,v) \in E\ ]$

- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di CL, è dimostrare che CL ∈ NP
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
  - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

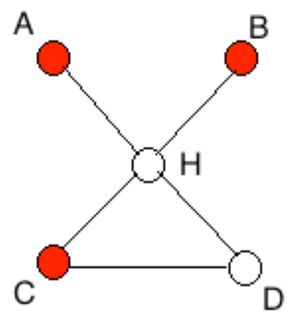
Il problema Clique (CL)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{CL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{CL}}(G, k) = \{ C \subseteq V\}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{CL}} (G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{CL}}(G,k)) = \exists\, C \in \mathbf{S}_{\mathbf{CL}}(G,k) : |V'| \geq k \wedge \forall\, u,v \in V' \, [\, (u,v) \in E]$

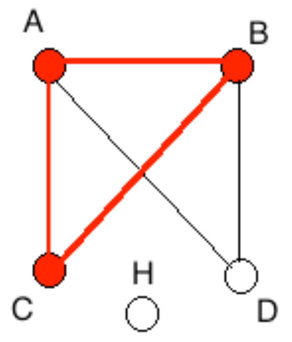
- Dimostriamo che CL $\in$ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - Un certificato è un sottoinsieme C di V
  - per verificare che C è effettivamente una clique per G, ossia che C soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{CL}} (G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{CL}}(G,k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi u, v in C e verificare che $(u,v) \in E$
  - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2|E|)$
  - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

Il problema Clique (CL)

- Dimostriamo che CL è completo per NP riducendo polinomialmente IS a CL
  - ossia, dimostriamo che IS $\preccurlyeq$ CL
- Trasformiamo una istanza $\langle$ G=(V,E), k $\rangle$ di IS nell'istanza $\langle$ G^C=(V,E^C), k $\rangle$ di CL
  - in cui **G^c è il grafo complemento di G: (u,v) è un arco di G^c se e soltanto se (u,v) non è un arco di G, ossia E^c = { (u,v) : (u,v) $\notin$ E }**
  - **$I \subseteq$ V è un insieme indipendente per G se e soltanto se I è una clique per G^c**
  - ossia, $\langle$ G=(V,E), k $\rangle$ è una istanza sì di IS se e solo se $\langle$ G^C=(V,E^C), k $\rangle$ è una istanza sì di CL
  - e calcolare $\langle$ G^C=(V,E^C), | k $\rangle$ richiede tempo polinomiale in |$\langle$ G=(V,E), k $\rangle$ |



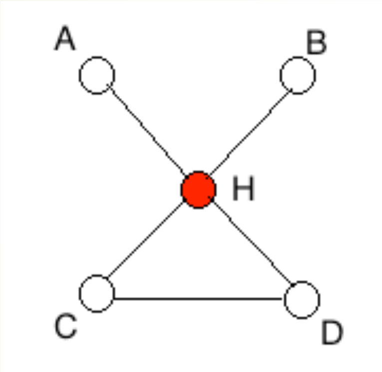
Un insieme indipendente in G ...



... e una clique in G complemento

Il problema Dominating Set (DS)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), un sottoinsieme D di nodi tale che ogni nodo che non è in D ha almeno un vicino in D è un ***dominating set*** di G
- Un dominating set è un insieme di nodi che domina tutti i ***nodi*** del grafo.



Un vertex cover V' è sempre un dominating set:
se ogni arco ha un estremo in V', ogni nodo non in V' ha un vicino in V'!

Ma non sempre un dominating set è un vertex cover : in figura vediamo un dominating set che non è un vertex cover: infatti, l'arco (C,D) non è coperto dal nodo H

- Nel problema Dominating Set vogliamo trovare un sottoinsieme di nodi "piccolo" che domini tutti i nodi di un grafo

Il problema Dominating Set (DS)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni nodo che non è in quel sottoinsieme ha un vicino in esso?
- Questo problema prende il nome di Dominating Set (DS, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{DS}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo **connesso** non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G, k) = \{ D \subseteq V \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{DS}}(G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G,k)) = \exists\, D \in \mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G,k) : |D| \leq k \wedge \forall\, u \in V\text{-}D\, [\, \exists\, v \in D: (u,v) \in E\,]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di DS, è dimostrare che DS ∈ NP
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
  - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

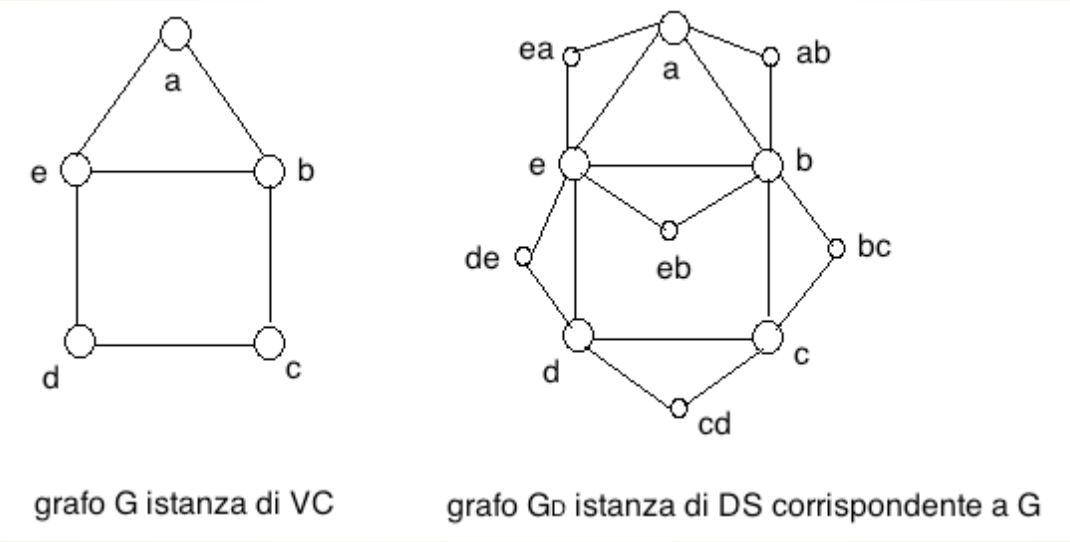
Il problema Dominating Set (DS)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni nodo che non è in quel sottoinsieme ha un vicino in esso?
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{DS}}$ = { ⟨ G=(V,E), k ⟩ : G è un grafo **connesso** non orientato $\wedge\ k \in \mathbb{N}$ }
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G, k) = \{ D \subseteq V \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{DS}}(G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G,k)) = \exists D \in \mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G,k) : |D| \leq k \wedge \forall u \in V\text{-}D\ [\ \exists v \in D: (u,v) \in E\ ]$

- Dimostriamo che DS ∈ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - Un certificato è un sottoinsieme D di V
  - per verificare che D è effettivamente un Dominating Set per G, ossia che D soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{DS}}(G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{DS}}(G,k))$, dobbiamo esaminare ciascun nodo u in V-D (e verificare che esiste un nodo v in D tale che (u,v) ∈ E
  - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2|E|)$
  - ossia, in tempo polinomiale in | ⟨ G=(V,E), k ⟩ |

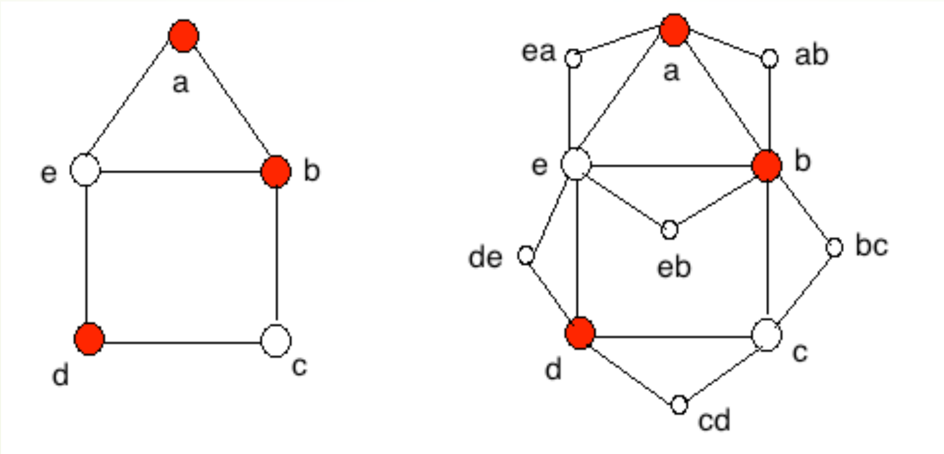
Il problema Dominating Set (DS)

- Dimostriamo che DS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a DS
  - ossia, dimostriamo che VC $\preccurlyeq$ DS
- Trasformiamo una istanza $\langle$ G=(V,E), k $\rangle$ di VC nell'istanza $\langle$ $G_D=(V_D,E_D)$, k $\rangle$ di DS
  - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv: (u,v) \in E \}$
  - e in cui $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv): (u,v) \in E \}$



Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
  - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv: (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv): (u,v) \in E \}$
- Se G ha un vertex cover V' con $|V'| \leq k$, allora, V' è un dominating set per G_D
  - infatti: $V' \subseteq V \subseteq V_D$; inoltre, comunque scegliamo un nodo u in V_D:
    - se $u \in V - V'$: poiché G è connesso esiste un arco (u,v) in E, e poiché V' è un vertex cover per G allora $v \in V'$
    - se $u = xy \in W$, poiché V' è un vertex cover per G allora $x \in V'$ o $y \in V'$

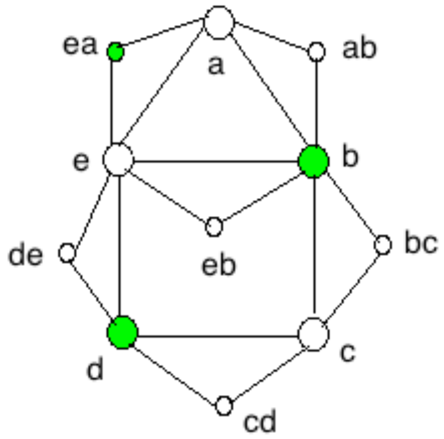


un vertex cover V' per G

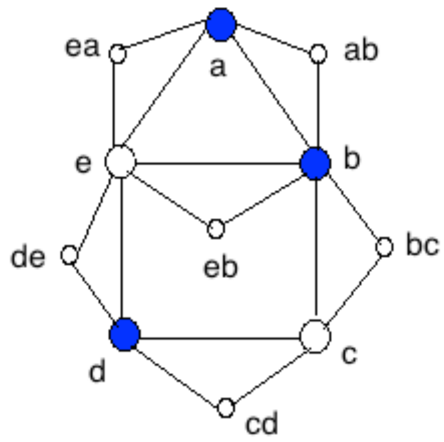
V' è un dominating set per G_D

Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza ⟨ $G=(V,E)$, k ⟩ di VC nell'istanza ⟨ $G_D=(V_D,E_D)$, k ⟩ di DS
  - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv: (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv): (u,v) \in E \}$
- Se G_D ha un dominating set D con $|D| \leq k$, allora,
- 1) trasformiamo D in un nuovo dominating set D' per G_D tale che $D' \subseteq V$ e $|D'|=|D|$
  - se D contiene qualche $uv \in W$, sostituiamo uv con u (o con v, è indifferente)
  - poiché uv domina solo u e v, quello che otteniamo è un nuovo insieme dominante



Un dominating set che contiene ea $\in$ W



Il dominating set in cui ea è stato sostituito da a (che domina ea)

Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
  - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv: (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv): (u,v) \in E \}$
- Se G_D ha un dominating set $D' \subseteq V$ con $|D'| \leq k$, allora,
- 1) trasformiamo D in un nuovo dominating set D' per G_D tale che $D' \subseteq V$ e $|D'|=|D|$
- 2) D' è un vertex cover per G, infatti:
  - per ogni arco $(u,v) \in E$, $uv \in W$
    - poiché D' è un dominating set per G_D allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$ oppure $uv \in D'$
    - e poiché D' non contiene nodi di W, ossia $uv \notin D'$
  - allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$
- Quindi, abbiamo dimostrato che $\langle G=(V,E), k \rangle$ è una istanza sì di VC se e solo se $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ è una istanza sì di DS
- Infine, poiché calcolare $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), k \rangle|$
- Questo completa la prova che VC $\preccurlyeq$ DS