



Lezione 32 - prove di NP-completezza

Lezione del 23/05/2025

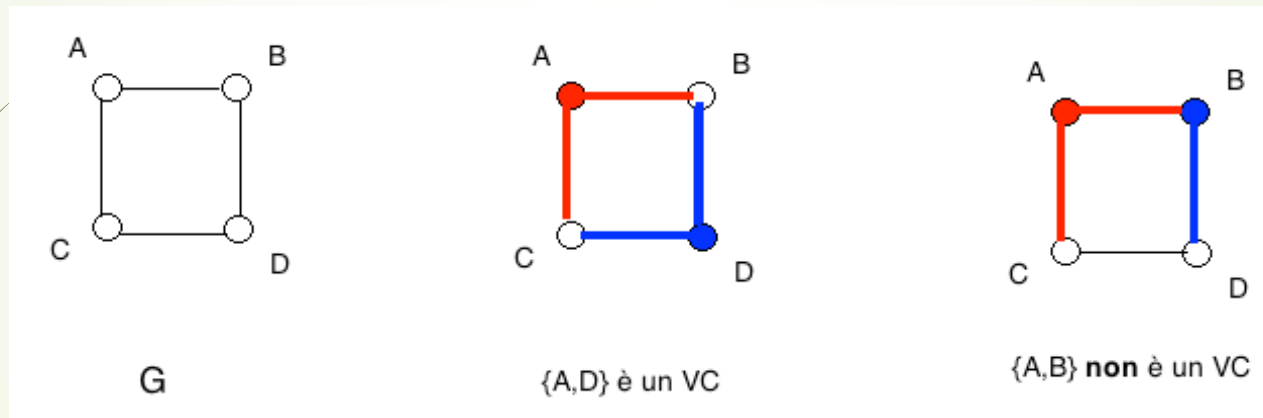


Dimostrazioni di NP-completezza

- Lezione prettamente tecnica
 - pressoché una esercitazione
- Vediamo un po' di esempi di applicazione del teorema 9.3 per dimostrare la NP-completezza di problemi
- Vedremo, in particolare, come dalla NP-completezza di 3SAT discenda la NP-completezza di un nuovo problema: Vertex Cover
- e come dalla NP-completezza di Vertex Cover discenda la NP-completezza di
 - Independent Set
 - Clique
 - Dominating set

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme V' di nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme è un **vertex cover** di G
- Un vertex cover è un insieme di nodi che “copre” tutti gli archi del grafo



- Nel problema Vertex Cover vogliamo trovare un sottoinsieme di nodi “piccolo” che copra tutti gli archi di un grafo

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme V' di V di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in V' ?
- Questo problema prende il nome di Vertex Cover (VC, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $S_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V \}$
 - $\pi_{VC}(G, k, S_{VC}(G, k)) = \exists V' \in S_{VC}(G, k) : |V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E [u \in V' \vee v \in V']$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di VC, è dimostrare che $VC \in NP$
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
 - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - ed è quello che ci accingiamo a fare insieme

Il problema Vertex Cover (VC)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
 - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V \}$
 - $\pi_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G, k)) = \exists V' \in \mathbf{S}_{VC}(G, k) : |V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E [u \in V' \vee v \in V']$
- Dimostriamo che $VC \in NP$ mostrando che ogni sua istanza si ha un certificato che sia verificabile in tempo deterministico polinomiale
 - Un certificato è un sottoinsieme V' di V
 - per verificare che V' è effettivamente un Vertex Cover per G , ossia che V' soddisfa $\pi_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascun arco (u, v) di G e verificare che $u \in V'$ o $v \in V'$
 - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|E| \cdot |V|)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V, E), k \rangle |$

Il problema Vertex Cover (VC)

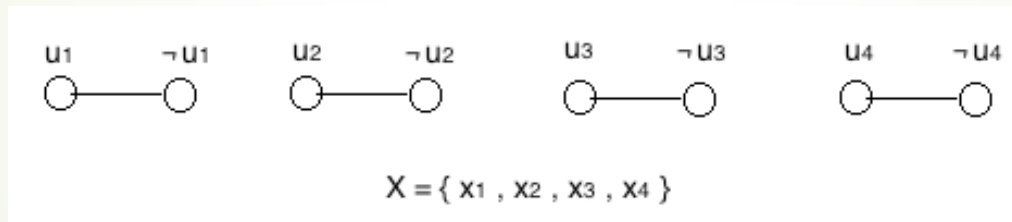
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
 - $\mathfrak{I}_{VC} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{VC}(G, k) = \{ V' \subseteq V \}$
 - $\pi_{VC}(G, k, \mathbf{S}_{VC}(G, k)) = \exists V' \in \mathbf{S}_{VC}(G, k) : |V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E [u \in V' \vee v \in V']$
- Dimostriamo che VC è completo per NP riducendo polinomialmente 3SAT a VC
- ossia, mostriamo che $3SAT \leq VC$
- Ricordiamo, ancora una volta, 3SAT:
 - una istanza di 3SAT è una coppia $\langle X, g \rangle$
 - in cui g è una espressione booleana in 3CNF nelle variabili in X
 - ossia, $g = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$ e $c_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3})$ e $\ell_{jh} \in X$ oppure $\neg \ell_{jh} \in X$
 - e occorre decidere se esiste una assegnazione α di valori di verità alle variabili in X tale che $g(\alpha(X)) = \mathbf{vero}$

Il problema Vertex Cover (VC)

- ▶ Dimostriamo che VC è completo per NP dimostrando che $3SAT \leq VC$
- ▶ Ossia, dobbiamo mostrare come trasformare un'istanza $\langle X, g \rangle$ di 3SAT in un'istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC in modo tale che
 - ▶ g è soddisfacibile se e soltanto se G ha un vertex cover di k nodi
 - ▶ data $\langle X, g \rangle$, calcoliamo $\langle G=(V,E), k \rangle$ in tempo polinomiale in $|\langle X, g \rangle|$
- ▶ Neanche a dirlo, le istanze dei due problemi sono molto diverse!
- ▶ Per eseguire la trasformazione utilizzeremo una tecnica cui faremo spesso riferimento anche in seguito quando vogliamo ridurre un problema A ad un problema B:
 - ▶ ad ogni **struttura** dell'istanza di A
 - ▶ vedremo a breve per mezzo di esempi cosa intendiamo con questo termine
 - ▶ faremo corrispondere una **struttura** dell'istanza di B,
 - ▶ in modo che strutture dello stesso genere presenti nell'istanza di A corrispondano a strutture dello stesso genere dell'istanza di B.
 - ▶ A tali strutture daremo il nome di **gadget**.

Il problema Vertex Cover (VC)

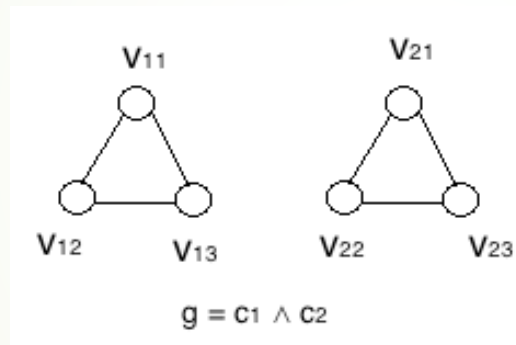
- Le *strutture* che compongono un'istanza $\langle X, g \rangle$ di 3SAT sono di due tipi:
 - variabili
 - clausole
- Trasformiamo ciascuna variabile in X in un arco – ossia, il **gadget-variabile** è P_2
 - il gadget-variabile della variabile x_i è l'arco $(u_i, \neg u_i)$
 - gadget-variabile associati a variabili diverse non hanno nodi in comune**



- Scegliendo un nodo in ogni gadget-variabile otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo
- Se in un gadget-variabile non scegliamo alcun nodo, non copriamo quell'arco!
- Allora, un Vertex Cover *minimo* di questa porzione di grafo ha cardinalità $|X|$
 - ossia, $|X|$ nodi sono sufficienti, ma con meno di $|X|$ nodi qualche arco rimane scoperto

Il problema Vertex Cover (VC)

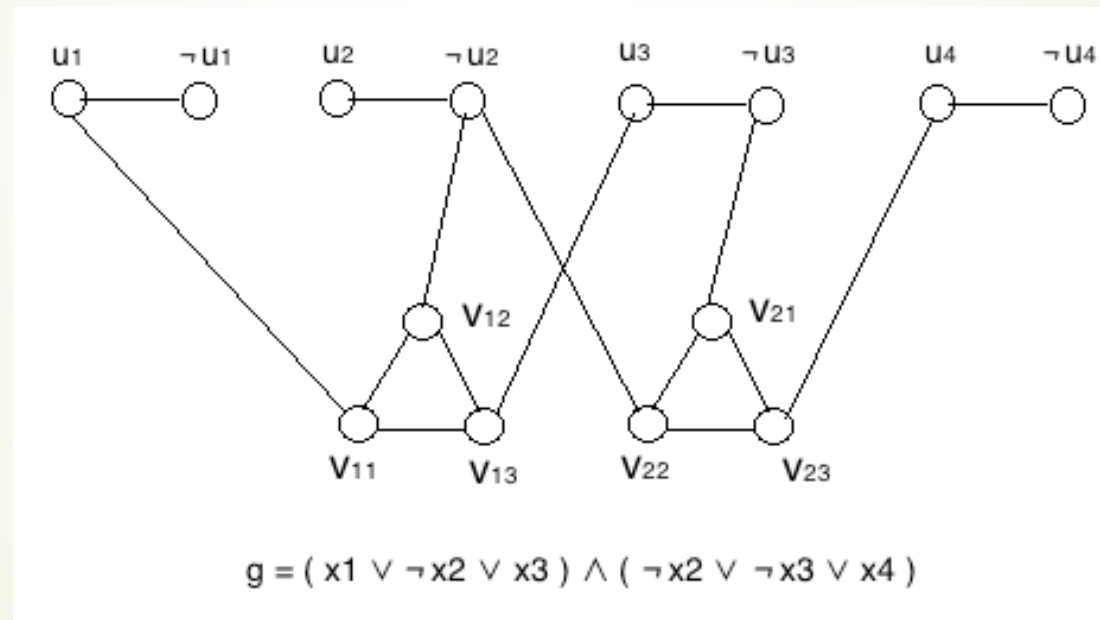
- Trasformiamo ciascuna clausola in g in un ciclo di 3 nodi – ossia, il **gadget-clausola** è C_3
 - il gadget-clausola della clausola c_j è la terna di archi $(v_{j1}, v_{j2}), (v_{j2}, v_{j3}), (v_{j3}, v_{j1})$,
 - gadget-clausola associati a clausole diverse non hanno nodi in comune**
 - gadget-clausola e gadget-variabile non hanno nodi in comune**



- Scegliendo due nodi in ogni gadget-clausola otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo
- Se in un gadget-clausola scegliamo meno di due nodi, non copriamo quel gadget!
- Allora, un Vertex Cover *minimo* di questa porzione di grafo ha cardinalità $2 |g| = 2m$
 - ossia, $2m$ nodi sono sufficienti, ma con meno di $2m$ nodi qualche arco rimane scoperto

Il problema Vertex Cover (VC)

- Ora dobbiamo collegare i gadget-clausola con i gadget-variazione
- E per farlo utilizziamo il modo in cui sono composte le clausole
 - colleghiamo ciascun nodo in ciascun gadget-clausola al nodo-variazione che gli corrisponde
 - ad esempio, se $c_j = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ creiamo gli archi “obliqui” (v_{j1}, u_1) , $(v_{j2}, \neg u_2)$, (v_{j3}, u_3)



Il problema Vertex Cover (VC)

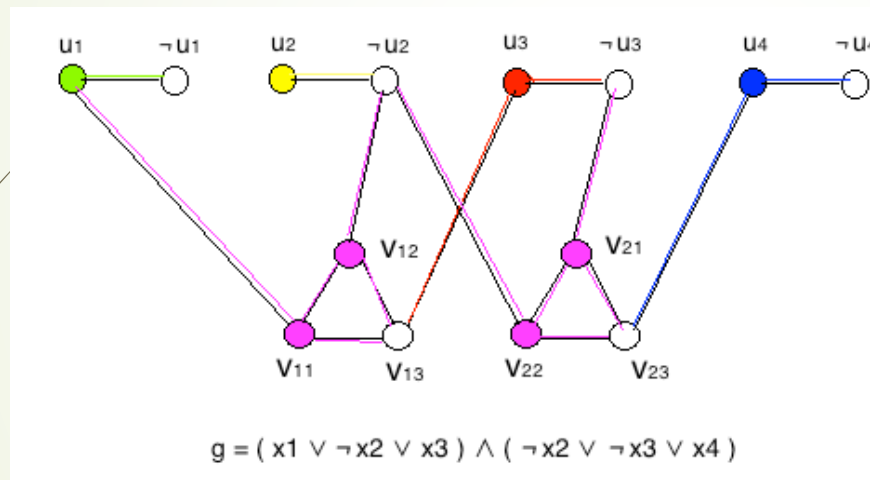
- E così, abbiamo costruito il grafo G corrispondente a $\langle X, g \rangle$
- per completare l'istanza $\langle G, k \rangle$ di VC corrispondente a $\langle X, g \rangle$ scegliamo
$$k = |X| + 2|g| = n + 2m$$
- Banalmente, costruire $\langle G, k \rangle$ da $\langle X, g \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle X, g \rangle|$
 - provate a verificarlo per esercizio
- Resta da mostrare che g è soddisfacibile se e soltanto se G ha un vertex cover di al più $k = n + 2m$ nodi
- Prima di procedere con questa dimostrazione, ricordiamo che
 - come abbiamo già osservato
- n nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-variabile e $2m$ nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-clausole
- perciò, almeno **$k = n + 2m$ nodi sono necessari** per coprire gli archi di G
- resta da far vedere che **$k = n + 2m$ nodi sono sufficienti a coprire gli archi di G se e soltanto se g è soddisfacibile**

Il problema Vertex Cover (VC)

- Se g è soddisfacibile, costruiamo l'insieme V' nel modo seguente:
 - sia $\alpha : X \rightarrow \{\text{vero}, \text{falso}\}$ una assegnazione di verità che soddisfa g
 - ossia, per ogni $j = 1, \dots, m$, α assegna il valore vero ad almeno uno dei letterali nella clausola $c_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3})$: cioè, $\alpha(\ell_{j1}) = \text{vero}$ oppure $\alpha(\ell_{j2}) = \text{vero}$ oppure $\alpha(\ell_{j3}) = \text{vero}$
- 1) inseriamo in V' n nodi dei gadget-variabile: per $i = 1, \dots, n = |X|$, inseriamo in V' il nodo u_i se $\alpha(x_i) = \text{vero}$, il nodo $\neg u_i$ se $\alpha(x_i) = \text{falso}$
- 2) per ogni $j = 1, \dots, m$, scegliamo un letterale ℓ_{jh} ($h=1$, o $h=2$, o $h=3$) nella clausola c_j al quale è stato assegnato valore **vero** da α e inseriamo in V' i due nodi del gadget-clausola associato a c_j che non sono v_{jh}
 - ad esempio, se $\alpha(x_3) = \text{vero}$ e $c_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ e scegliamo ℓ_{13} , allora inseriamo in V' i nodi v_{11} e v_{12}
- ogni arco nei gadget-variabile ha un estremo in V'
- per ogni $j = 1, \dots, m$, V' contiene due nodi del gadget-clausola associato a c_j : pertanto, tutti gli archi nei gadget-clausola sono coperti
- per ogni $j = 1, \dots, m$, non abbiamo inserito in V' un solo nodo che è collegato ad un nodo-variabile che appartiene a V' : perciò, tutti gli archi obliqui sono coperti

Il problema Vertex Cover (VC)

- Quindi i nodi in V' coprono tutti gli archi di G :
 - in figura è mostrato un vertex cover (i nodi colorati) corrispondente all'assegnazione $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(x_3) = \alpha(x_4) = \mathbf{vero}$ e la corrispondente copertura degli archi



- $|V'| = n + 2m$
- Quindi: **se g è soddisfacibile, allora G contiene un Vertex Cover di $k (= n + 2m)$ nodi**

Il problema Vertex Cover (VC)

- Viceversa: **se G contiene un Vertex Cover V' di $k (= n + 2m)$ nodi allora**
 - V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile
 - V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola
- Poiché V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile, consideriamo la seguente assegnazione di verità α per le variabili in X :
 - $\alpha(x_i) = \text{vero}$ se $u_i \in V'$
 - $\alpha(x_i) = \text{falso}$ se $\neg u_i \in V'$
- Poiché V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola, allora un arco “obliquo” in ogni gadget clausola non è coperto dai nodi in V' del gadget-clausola
- Allora, per ogni gadget clausola un arco “obliquo” è coperto da un nodo di un gadget-variabile contenuto in V'
 - ossia, da un nodo u_i – e quindi quella clausola contiene x_i come letterale e $\alpha(x_i) = \text{vero}$
 - oppure da un nodo $\neg u_i$ – e quindi quella clausola contiene $\neg x_i$ come letterale e $\alpha(x_i) = \text{falso}$
- Questo significa che ogni clausola contiene un letterale al quale α assegna valore **vero**
- e quindi **g è soddisfacibile!**

Il problema Independent Set (IS)

- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme di nodi tale che nessuna coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco è un **insieme indipendente** per G
- **Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un insieme indipendente per G di almeno k nodi?**
- Questo problema prende il nome di **Independent Set (IS)**, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathcal{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
 - $\pi_{IS}(G, k, \mathcal{S}_{IS}(G, k)) = \exists I \in \mathcal{S}_{IS}(G, k) : |I| \geq k \wedge \forall u, v \in I [(u, v) \notin E]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di IS, è dimostrare che $IS \in NP$
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
 - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
 - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
 - $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G, k)) = \exists I \in \mathbf{S}_{IS}(G, k) : |I| \geq k \wedge \forall u, v \in I [(u, v) \notin E]$
- Dimostriamo che IS $\in$ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - Un certificato è un sottoinsieme I di V
 - per verificare che I è effettivamente un insieme indipendente per G , ossia che I soddisfa $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi u, v in I e verificare che $(u, v) \notin E$
 - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2 |E|)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

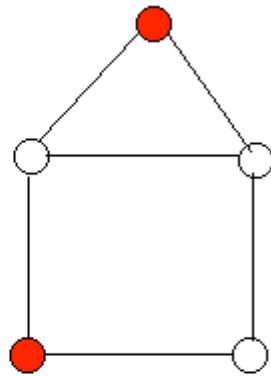
Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
 - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
 - $\pi_{IS}(G, k, \mathbf{S}_{IS}(G, k)) = \exists I \in \mathbf{S}_{IS}(G, k) : |I| \geq k \wedge \forall u, v \in I [(u, v) \notin E]$
- Dimostriamo che IS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a IS
 - ossia, dimostriamo che $VC \leq IS$
- e, questa volta, la riduzione è poco più che una osservazione...
- Perché è sufficiente osservare che

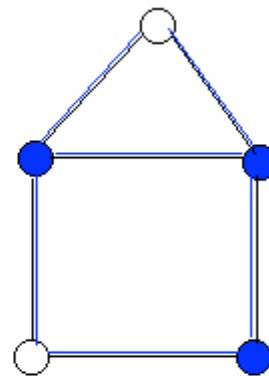
**un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G
se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G**

Il problema Independent Set (IS)

- Dato un grafo $G=(V,E)$, un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G
- se $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G allora, per ogni arco $(u,v) \in E$ accade che $u \notin I$ oppure $v \notin I$ - ossia, $u \in V'$ oppure $v \in V'$, cioè V' è un vertex cover per G
- se $V' \subseteq V$ è un vertex cover per G allora, per ogni arco $(u,v) \in E$ accade che $u \in V'$ oppure $v \in V'$ - ossia, $u \notin I$ oppure $v \notin I$, cioè I è un insieme indipendente per G



Un insieme indipendente



e il suo complemento: un vertex cover

Il problema Independent Set (IS)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni arco ha almeno un estremo in quel sottoinsieme?
 - $\mathfrak{I}_{IS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathcal{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subseteq V \}$
 - $\pi_{IS}(G, k, \mathcal{S}_{IS}(G, k)) = \exists I \in \mathcal{S}_{IS}(G, k) : |I| \geq k \wedge \forall u, v \in I [(u, v) \notin E]$
- Dimostriamo che IS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a IS
 - osservando che **un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G**
- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G=(V,E), |V| - k \rangle$ di IS
 - in cui il grafo rimane invariato!
- G ha un vertex cover V' di $\leq k$ nodi se e soltanto se G ha un insieme indipendente $I = V - V'$ di $\geq |V| - k$ nodi
- e calcolare $\langle G=(V,E), |V| - k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $\langle G=(V,E), k \rangle$

Il problema Clique (CL)

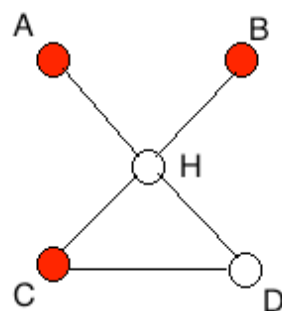
- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme di nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco è un **grafo completo (clique)** per G
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?
- Questo problema prende il nome di Clique (CL, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{\text{CL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathcal{S}_{\text{CL}}(G, k) = \{ C \subseteq V \}$
 - $\pi_{\text{CL}}(G, k, \mathcal{S}_{\text{CL}}(G, k)) = \exists C \in \mathcal{S}_{\text{CL}}(G, k) : |C| \geq k \wedge \forall u, v \in C [(u, v) \in E]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di CL, è dimostrare che $\text{CL} \in \text{NP}$
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
 - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

Il problema Clique (CL)

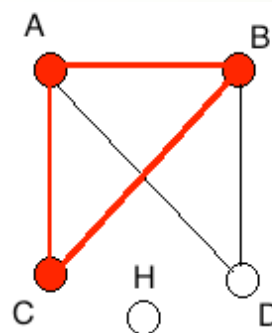
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?
 - $\mathfrak{I}_{\text{CL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{CL}}(G, k) = \{ C \subseteq V \}$
 - $\pi_{\text{CL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{CL}}(G, k)) = \exists C \in \mathbf{S}_{\text{CL}}(G, k) : |C| \geq k \wedge \forall u, v \in C [(u, v) \in E]$
- Dimostriamo che CL $\in$ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - Un certificato è un sottoinsieme C di V
 - per verificare che C è effettivamente una clique per G , ossia che C soddisfa $\pi_{\text{CL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{CL}}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi u, v in C e verificare che $(u, v) \in E$
 - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2 |E|)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

Il problema Clique (CL)

- Dimostriamo che CL è completo per NP riducendo polinomialmente IS a CL
 - ossia, dimostriamo che $IS \leq CL$
- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di IS nell'istanza $\langle G^c=(V,E^c), k \rangle$ di CL
 - in cui **G^c è il grafo complemento di G : (u,v) è un arco di G^c se e soltanto se (u,v) non è un arco di G , ossia $E^c = \{ (u,v) : (u,v) \notin E \}$**
 - **$I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se I è una clique per G^c**
 - ossia, $\langle G=(V,E), k \rangle$ è una istanza sì di IS se e solo se $\langle G^c=(V,E^c), k \rangle$ è una istanza sì di CL
 - e calcolare $\langle G^c=(V,E^c), |k| \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), k \rangle|$



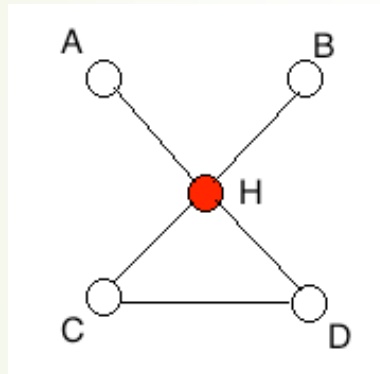
Un insieme indipendente in G ...



... e una clique in G complemento

Il problema Dominating Set (DS)

- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme D di nodi tale che ogni nodo che non è in D ha almeno un vicino in D è un **dominating set** di G
- Un dominating set è un insieme di nodi che domina tutti i **nodi** del grafo.



Un vertex cover V' è sempre un dominating set: se ogni arco ha un estremo in V' , ogni nodo non in V' ha un vicino in V' !

Ma non sempre un dominating set è un vertex cover: in figura vediamo un dominating set che non è un vertex cover: infatti, l'arco (C, D) non è coperto dal nodo H

- Nel problema Dominating Set vogliamo trovare un sottoinsieme di nodi “piccolo” che domini tutti i nodi di un grafo

Il problema Dominating Set (DS)

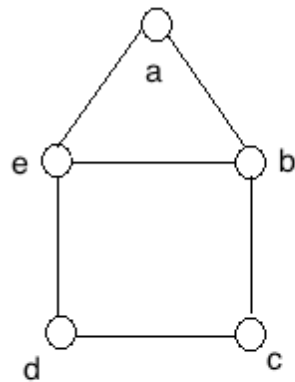
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni nodo che non è in quel sottoinsieme ha un vicino in esso?
- Questo problema prende il nome di Dominating Set (DS, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{DS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo } \mathbf{connesso} \text{ non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{DS}(G, k) = \{ D \subseteq V \}$
 - $\pi_{DS}(G, k, \mathbf{S}_{DS}(G, k)) = \exists D \in \mathbf{S}_{DS}(G, k) : |D| \leq k \wedge \forall u \in V-D [\exists v \in D : (u, v) \in E]$
- Il primo passo, per dimostrare la NP-completezza di DS, è dimostrare che $DS \in NP$
- Possiamo farlo descrivendo un algoritmo non deterministico che lo decide in tempo polinomiale
 - e provate a farlo per esercizio
- Oppure mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale

Il problema Dominating Set (DS)

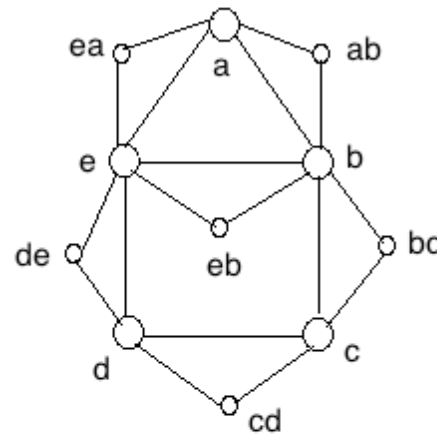
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni nodo che non è in quel sottoinsieme ha un vicino in esso?
 - $\mathfrak{I}_{DS} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo } \mathbf{connesso} \text{ non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{DS}(G, k) = \{ D \subseteq V \}$
 - $\pi_{DS}(G, k, \mathbf{S}_{DS}(G, k)) = \exists D \in \mathbf{S}_{DS}(G, k) : |D| \leq k \wedge \forall u \in V-D [\exists v \in D : (u, v) \in E]$
- Dimostriamo che DS $\in$ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - Un certificato è un sottoinsieme D di V
 - per verificare che D è effettivamente un Dominating Set per G , ossia che D soddisfa $\pi_{DS}(G, k, \mathbf{S}_{DS}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascun nodo u in $V-D$ (e verificare che esiste un nodo v in D tale che $(u, v) \in E$)
 - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|^2 |E|)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

Il problema Dominating Set (DS)

- Dimostriamo che DS è completo per NP riducendo polinomialmente VC a DS
 - ossia, dimostriamo che $VC \leq DS$
- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
 - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv : (u,v) \in E \}$
 - e in cui $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv) : (u,v) \in E \}$



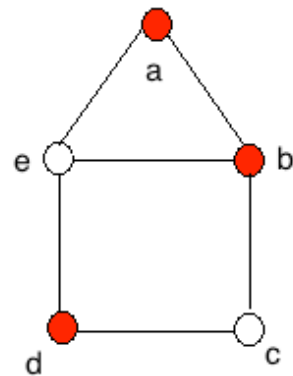
grafo G istanza di VC



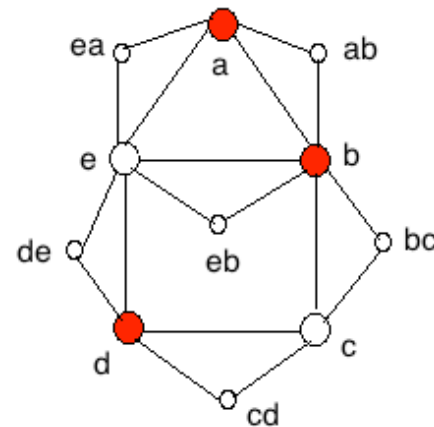
grafo G_D istanza di DS corrispondente a G

Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
 - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv: (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv): (u,v) \in E \}$
- Se G ha un vertex cover V' con $|V'| \leq k$, allora, V' è un dominating set per G_D
 - infatti: $V' \subseteq V \subseteq V_D$; inoltre, comunque scegliamo un nodo u in V_D :
 - se $u \in V - V'$: poiché G è connesso esiste un arco (u,v) in E , e poiché V' è un vertex cover per G allora $v \in V'$
 - se $u = xy \in W$, poiché V' è un vertex cover per G allora $x \in V'$ o $y \in V'$



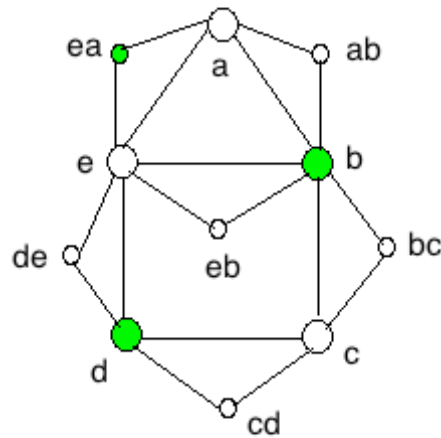
un vertex cover V' per G



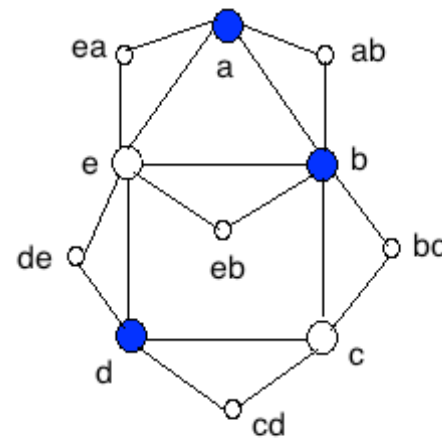
V' è un dominating set per G_D

Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
 - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv : (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv) : (u,v) \in E \}$
- Se G_D ha un dominating set D con $|D| \leq k$, allora,
- 1) trasformiamo D in un nuovo dominating set D' per G_D tale che $D' \subseteq V$ e $|D'| = |D|$
 - se D contiene qualche $uv \in W$, sostituiamo uv con u (o con v , è indifferente)
 - poiché uv domina solo u e v , quello che otteniamo è un nuovo insieme dominante



Un dominating set che contiene $ea \in W$



Il dominating set in cui ea è stato sostituito da a (che domina ea)

Il problema Dominating Set (DS)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ di DS
 - in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv : (u,v) \in E \}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u,uv), (v,uv) : (u,v) \in E \}$
- Se G_D ha un dominating set $D' \subseteq V$ con $|D'| \leq k$, allora,
- 1) trasformiamo D in un nuovo dominating set D' per G_D tale che $D' \subseteq V$ e $|D'| = |D|$
- 2) D' è un vertex cover per G , infatti:
 - per ogni arco $(u,v) \in E$, $uv \in W$
 - poiché D' è un dominating set per G_D allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$ oppure $uv \in D'$
 - e poiché D' non contiene nodi di W , ossia $uv \notin D'$
 - allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$
- Quindi, abbiamo dimostrato che $\langle G=(V,E), k \rangle$ è una istanza sì di VC se e solo se $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ è una istanza sì di DS
- Infine, poiché calcolare $\langle G_D=(V_D,E_D), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), k \rangle|$
- Questo completa la prova che $VC \leq DS$