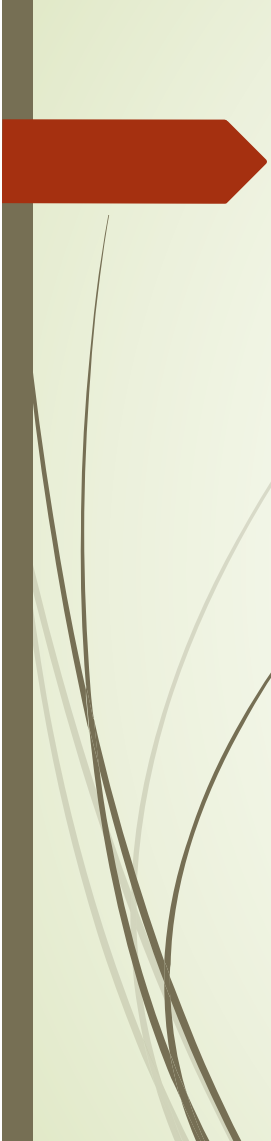




Lezione 33 – prove di NP-completezza

Lezione del 28/05/2025



Dimostrazioni di NP-completezza

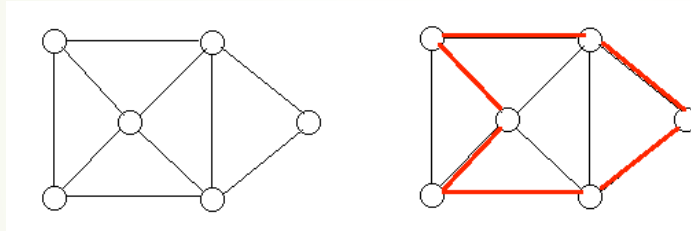
- ▶ Altra lezione prettamente tecnica
 - ▶ pressoché una esercitazione
- ▶ Vediamo ancora altri esempi di applicazione del teorema 9.3 per dimostrare la NP-completezza di problemi
- ▶ Vedremo, in particolare, come dalla NP-completezza di Hamiltonian Cycle discenda la NP-completezza di:
 - ▶ Hamiltonian Path
 - ▶ Long Path
 - ▶ Travelling Salesman Problem
- ▶ e come dalla NP-completezza di 3-colorability discenda la NP-completezza di
 - ▶ k – colorability , per ogni k costante
 - ▶ Colorability
- ▶ Questa volta, però, daremo per buona la NP-completezza di Hamiltonian Cycle e di 3-colorability – senza dimostrarla!

Dimostrazioni di NP-completezza

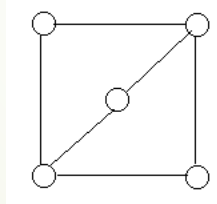
- ▶ Questa volta, però, daremo per buona la NP-completezza di Hamiltonian Cycle e di 3-colorability – senza dimostrarla!
- ▶ Ciò mi permette di sottolineare che,
 - ▶ una volta che è stata dimostrata la NP-completezza di un problema,
- ▶ la **conoscenza** della NP-completezza di quel problema può essere utilizzata per dimostrare la NP-completezza di altri problemi
 - ▶ utilizzando, semplicemente, il teorema 9.3
- ▶ senza aver bisogno di ricostruire l'intera catena di riduzioni che parte da SAT!
- ▶ In un certo senso, il teorema 9.3 ci permette di utilizzare “a scatola nera” le dimostrazioni pregresse di NP-completezza
 - ▶ e questo è molto comodo!
- ▶ E, infatti, la classe NPC ha ormai innumerevoli membri

Il problema Hamiltonian Cycle (HC)

- Lo abbiamo già incontrato: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un ciclo in G che passa una ed una sola volta attraverso ogni nodo di G è un **ciclo hamiltoniano** in G
- In figura, è illustrato un grafo ed un ciclo hamiltoniano in esso
 - perché un grafo può contenere anche più di un ciclo hamiltoniano: provate!



- D'altra parte, esistono grafi che non contengono cicli hamiltoniani:



- provare per credere!

Il problema Hamiltonian Cycle (HC)

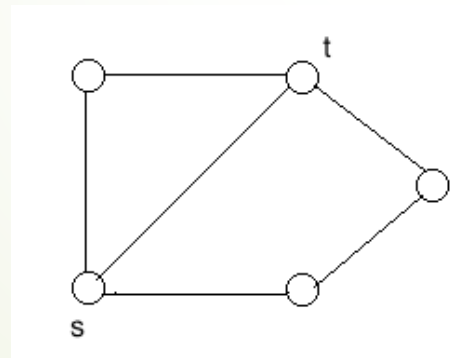
- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, esiste un ciclo hamiltoniano in G ?
- Questo problema prende il nome di Hamiltonian Cycle (HC, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{\text{HC}} = \{ \langle G=(V, E) \rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{HC}}(G) = \{ \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle : \text{per } i = 1, \dots, n, u_i \in V \wedge n = |V| \}$
 - $\pi_{\text{HC}}(G, \mathbf{S}_{\text{HC}}(G)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbf{S}_{\text{HC}}(G) : (u_n, u_1) \in E \wedge \forall i = 1, \dots, n-1 [(u_i, u_{i+1}) \in E] \wedge \forall i, j = 1, \dots, n, \text{ con } i \neq j [u_i \neq u_j]$
- Nel paragrafo 9.5.6 viene dimostrata la NP-completezza di HC
 - e la completezza viene dimostrata tramite una riduzione da VC
- Non studiamo il paragrafo 9.5.6
 - ma utilizziamo, in quel che segue, il fatto che $\text{HC} \in \text{NPC}$

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed una coppia di nodi $s, t \in V$, esiste un **percorso hamiltoniano** da s a t in G , ossia un percorso fra s e t che passa una e una sola volta attraverso ciascun nodo di G ?
 - $\mathfrak{I}_{\text{HP}} = \{ \langle G=(V, E), s, t \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge s \in V \wedge t \in V \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{HP}}(G, s, t) = \{ \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle : \text{per } i = 1, \dots, n, u_i \in V \wedge n = |V| \}$
 - $\pi_{\text{HP}}(G, \mathbf{S}_{\text{HP}}(G)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbf{S}_{\text{HP}}(G) : s = u_1 \wedge t = u_n \wedge \forall i = 1, \dots, n-1 [(u_i, u_{i+1}) \in E] \wedge \forall i, j = 1, \dots, n, \text{ con } i \neq j [u_i \neq u_j]$
- Dimostriamo che $\text{HP} \in \text{NP}$ mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - Un certificato è una sequenza di nodi $S = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$
 - verifichiamo che S è effettivamente un percorso hamiltoniano da s a t , ossia che S soddisfa $\pi_{\text{HP}}(G, s, t, \mathbf{S}_{\text{HP}}(G, s, t))$, in tempo $O(|E| |V| + |V|^2)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V, E), s, t \rangle |$

Il problema Hamiltonian Path (HP)

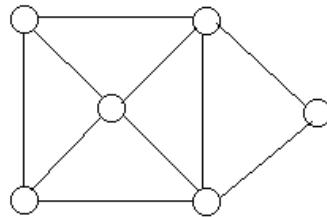
- Dimostriamo che HP è completo per NP riducendo polinomialmente HC a HP
- In effetti, i due problemi HP e HC si assomigliano moltissimo
 - Attenzione, però: la loro somiglianza potrebbe trarre in inganno
 - Ad una prima occhiata, potremmo pensare di trasformare una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G=(V,E), s, t \rangle$ di HP, in cui s e t sono due qualsiasi nodi in V tali che $(s,t) \in E$
 - tanto, potremmo pensare, se c'è un ciclo hamiltoniano in G , esso passa sicuramente sia per s che per t , e, per di più, s e t sono collegati da un arco...
 - ma non funziona! Infatti:



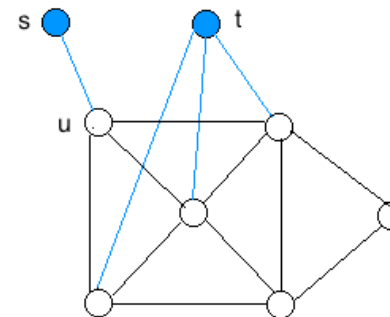
il grafo contiene un ciclo hamiltoniano
ma non contiene un percorso fra s e t
che passi una e una sola volta per ogni
nodo

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Perciò, anche se i due problemi HP e HC si assomigliano moltissimo, dobbiamo procedere con un po' di cautela...
- Dimostriamo che HP è completo per NP riducendo polinomialmente HC a HP
 - ossia, dimostriamo che $HC \leq HP$:
- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ di HP, dove
 - s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s,t \notin V$
 - $V' = V \cup \{s,t\}$
 - ed otteniamo E' scegliendo un nodo $u \in V$, collegando s ad u e collegando t a tutti i nodi che in G sono adiacenti ad u : $E' = E \cup \{(s,u)\} \cup \{(t,x) : (u,x) \in E\}$



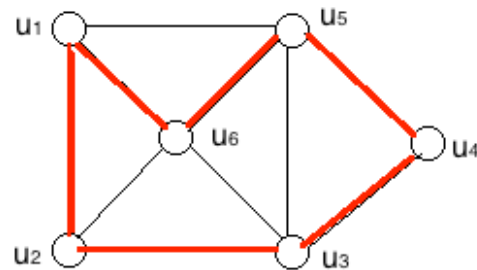
Il grafo G istanza di HC



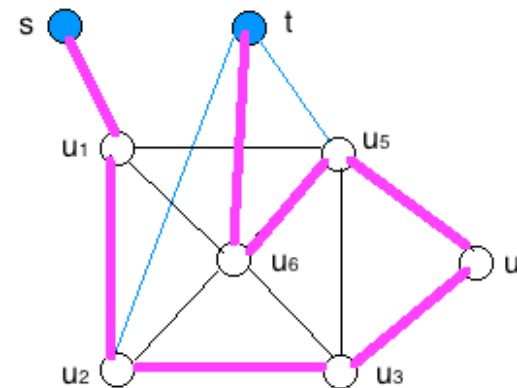
Il grafo G' e la coppia di nuovi nodi, s e t , istanza di HP

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ di HP, dove
 - s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s,t \notin V$, $V' = V \cup \{s,t\}$, $E' = E \cup \{(s,u) : (u,x) \in E\} \cup \{(t,x) : (u,x) \in E\}$
- Se G contiene un ciclo hamiltoniano $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$
 - scegliamo $u_1 = u$ (il nodo al quale è collegato s)
 - poiché $(u_i, u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$,
 - allora $\langle s, u_1, u_2, \dots, u_n, t \rangle$ è un percorso hamiltoniano in G'



Un ciclo hamiltoniano in G



Il corrispondente percorso hamiltoniano in G'

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ di HP, dove
 - s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s,t \notin V$, $V' = V \cup \{s,t\}$, $E' = E \cup \{(s,u) : (u,x) \in E\} \cup \{(t,x) : (u,x) \in E\}$
- Se G' contiene un percorso hamiltoniano $\langle s, u_1, u_2, \dots, u_n, t \rangle$
 - poiché $(u_i, u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$,
 - e poiché $(u_n, u_1) \in E$ – per costruzione di G' , in quanto t è stato collegato a tutti i nodi adiacenti a u_1 in G
 - allora $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ è un ciclo hamiltoniano in G
- Infine, costruire $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E) \rangle|$
- Questo completa la prova che $HC \leq HP$
- E che HP è NP-completo

Il problema Long Path (LP)

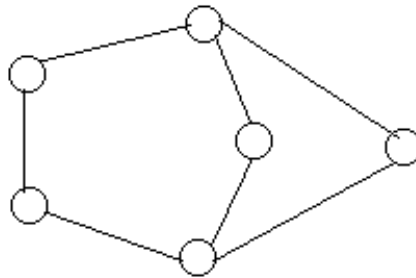
- Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$, una coppia di nodi s e t , e un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste in G un percorso da s a t di almeno k archi?
- Questo problema prende il nome di **Long Path (LP)**, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{LP} = \{ \langle G=(V,E), s, t, k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge s \in V \wedge t \in V \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathcal{S}_{LP}(G, s, t, k) = \{ \langle u_1, u_2, \dots, u_h \rangle : \text{per } i = 1, \dots, h, u_i \in V \}$
 - $\pi_{LP}(G, s, t, k, \mathcal{S}_{LP}(G, s, t, k)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_h \rangle \in \mathcal{S}_{LP}(G, s, t, k) : s = u_1 \wedge t = u_h \wedge \forall i = 1, \dots, h-1 [(u_i, u_{i+1}) \in E] \wedge \forall i, j = 1, \dots, h, \text{ con } i \neq j [u_i \neq u_j] \wedge h \geq k$
- Questo problema è davvero molto simile a HP!!!!
- In effetti, **la dimostrazione che $LP \in NP$ è identica a quella che prova che $HP \in NP$**
- A guardarlo bene, **HP è un caso particolare di LP**:
 - **un'istanza di HP è un'istanza di LP in cui $k = |V|$**
- Cioè, è banale ridurre polinomialmente HP a LP:
 - **trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E), s, t \rangle$ di HP nell'istanza $\langle G=(V,E), s, t, |V| \rangle$ di LP**
- Quindi, che $HP \leq LP$ e $LP \in NPC$
 - anche se, in effetti, non abbiamo dimostrato che $LP \in NP$...

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

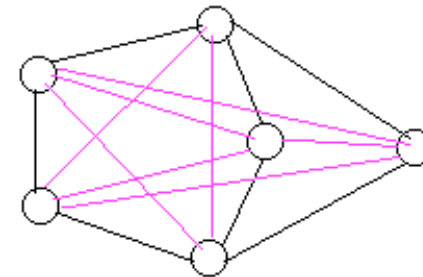
- Dati un grafo non orientato **completo e pesato** $G = (V, E, w)$, dove $w: E \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione peso, e un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste in G un ciclo hamiltoniano tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq k$?
- Questo problema prende il nome di **Travelling Salesman Problem** (problema del commesso viaggiatore, **TSP**, in breve), ed è così formalizzato:
 - $\mathfrak{I}_{\text{TSP}} = \{ \langle G=(V,E,w), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge w: E \rightarrow \mathbb{N} \wedge (u,v) \in E \text{ per ogni coppia di nodi } u,v \in V \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{TSP}}(G, k) = \{ \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle : n = |V| \}$
 - $\pi_{\text{TSP}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{TSP}}(G, k)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbf{S}_{\text{TSP}}(G, k) : \forall i, j = 1, \dots, n, \text{ con } i \neq j [u_i \neq u_j] \wedge w(u_1, u_2) + w(u_2, u_3) + \dots + w(u_{n-1}, u_n) + w(u_n, u_1) \leq k$
- Questo problema è molto simile a HC, ma con alcune importanti differenze:
 - G è un grafo completo: perciò di cicli hamiltoniani in G ne troviamo quanti ne vogliamo!
 - Ma a noi interessa un ciclo che “costi” poco: e qui sta il difficile...
- Tuttavia, la dimostrazione che $\text{TSP} \in \text{NP}$ è molto simile a quella che prova che $\text{HC} \in \text{NP}$ – e la fate per esercizio

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che $HC \leq TSP$
- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V,E',w), k \rangle$ di TSP, dove
 - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{(u,v): u,v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$
 - la funzione peso w è così definita:
per ogni arco di E , ossia, per ogni $(u,v) \in E$, poniamo $w(u,v)=1$,
per ogni arco non in E , ossia, per ogni $(u,v) \notin E$, poniamo $w(u,v)=2|V|$
 - $k = |V|$



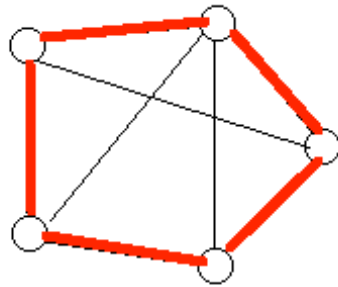
Una istanza G di HC
(G non contiene un ciclo hamiltoniano)



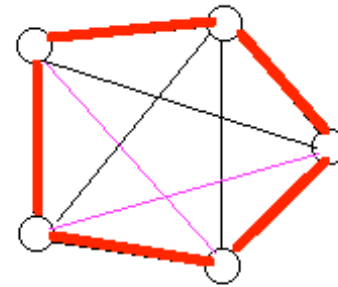
e la corrispondente istanza di TSP:
gli archi neri hanno peso 1
gli archi rosa hanno peso $2|V|=12$

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che $HC \leq TSP$
- Trasformiamo $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V,E',w), k \rangle$ di TSP, dove $k = |V|$ e
 - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{(u,v): u,v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$
 - per ogni arco di E , ossia, per ogni $(u,v) \in E$, poniamo $w(u,v)=1$,
per ogni arco non in E , ossia, per ogni $(u,v) \notin E$, poniamo $w(u,v)=2|V|$
- Se G contiene un ciclo hamiltoniano, tale ciclo è anche contenuto in G' :
 - esso è costituito di $|V|$ archi contenuti in E , perciò la somma dei loro pesi in G' è $|V|$
 - allora, G' contiene un ciclo hamiltoniano di costo $\leq k$



G contiene un ciclo hamiltoniano



G' contiene un ciclo hamiltoniano di costo $k = |V| = 5$

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che $HC \leq TSP$
- Trasformiamo $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V,E',w), k \rangle$ di TSP, dove $k = |V|$ e
 - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{(u,v): u,v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$
 - per ogni arco di E , ossia, per ogni $(u,v) \in E$, poniamo $w(u,v)=1$,
per ogni arco non in E , ossia, per ogni $(u,v) \notin E$, poniamo $w(u,v)=2|V|$
- Se G' contiene un ciclo hamiltoniano C tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq |V|$
 - C non può contenere archi appartenenti a $E'-E$, perché ciascuno degli archi in $E'-E$ ha peso $2|V|$
 - e quindi uno solo degli archi in $E'-E$ ha peso maggiore di $k = |V|$
 - perciò, poiché il peso complessivo di C è $k = |V|$, C è costituito di soli archi contenuti in E
 - ossia, C è un ciclo hamiltoniano contenuto in G
 - cioè, G contiene un ciclo hamiltoniano
- Infine, calcolare $\langle G'=(V,E',w), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E) \rangle|$
- Questo completa la prova che $HC \leq TSP$

Il problema Colorabilità (COL)

- Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, si vuole assegnare un colore a ciascun nodo di G in modo tale che vengano soddisfatti alcuni vincoli
- Nel problema di Colorabilità classico il vincolo che deve essere rispettato è:
nodì adiacenti devono essere colorati con colori diversi
 - possono essere definite, ribadiamo, tante regole diverse per colorare i nodi di un grafo
 - ma, quando non viene specificato altrimenti, ci si riferisce a questa regola
- Nel problema Colorabilità (in breve, COL) si vogliono colorare i nodi di un grafo utilizzando “pochi” colori:
- dati un grafo $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$ (con $k \leq |V|$), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
- Il problema COL è così formalizzato:
 - $\mathfrak{S}_{\text{COL}} = \{ \langle G=(V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$ (una soluzione possibile è una assegnazione di uno dei k colori a ciascun nodo)
 - $\pi_{\text{COL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k)) = \exists c \in \mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k) : \forall (u, v) \in E [c(u) \neq c(v)]$

Il problema Colorabilità (COL)

- Dati un grafo $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$ (con $k \leq |V|$), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
 - $\mathfrak{I}_{\text{COL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
 - $\pi_{\text{COL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k)) = \exists c \in \mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k) : \forall (u, v) \in E [c(u) \neq c(v)]$
- Dimostriamo che COL $\in$ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
 - Un certificato è una colorazione $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$
 - per verificare che c è effettivamente una colorazione per G , ossia che c soddisfa $\pi_{\text{COL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascun arco (u, v) in E e verificare che $c(u) \neq c(v)$
 - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|E|)$
 - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

Il problema k-Colorabilità (k-COL)

- Il problema k-COL è una piccola variazione di COL: **l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante**
- Questa sottigliezza "k nell'istanza / k costante" comporta un modo diverso di definire il problema k-COL:
 - sia $k \in \mathbb{N}$ un valore costante;
[il ; ci dice che la parte di frase che stiamo per enunciare è separata da quella che lo precede]
dato un grafo $G = (V, E)$, esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
- Formalmente:
 - $\mathfrak{I}_{\text{kCOL}} = \{ \langle G=(V,E) \rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \}$
 - $\mathcal{S}_{\text{kCOL}}(G) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
 - $\pi_{\text{kCOL}}(G, \mathcal{S}_{\text{kCOL}}(G)) = \exists c \in \mathcal{S}_{\text{kCOL}}(G) : \forall (u,v) \in E [c(u) \neq c(v)]$
- Osserviamo che l'unica differenza fra COL e k-COL è che nelle istanze del secondo problema è sparita k...
- Ma che vuol dire?

Il problema k-Colorabilità (k-COL)

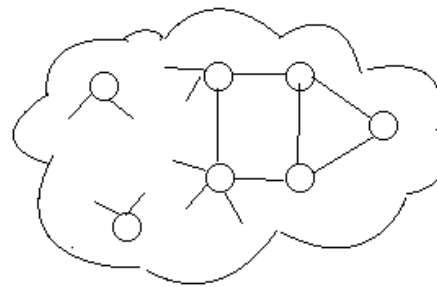
- Il problema k-COL è una piccola variazione di COL: l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante:
- L'unica differenza fra COL e -kCOL è che nelle istanze del secondo problema è sparita k...
- Ma che vuol dire?
 - che vogliamo colorare i nodi di un grafo con 1 colore – e avremo il problema 1-COL
 - oppure con due colori – e avremo il problema 2-COL
 - oppure con tre colori – e avremo il problema 3-COL
 - ... insomma, tanti problemi differenti!
- Che hanno una cosa in comune: *poiché sono tutti casi particolari di COL,*
tutti questi problemi appartengono a NP
 - ed ora ce li studiamo... uno per uno!

1-COL, 2-COL e 3-COL

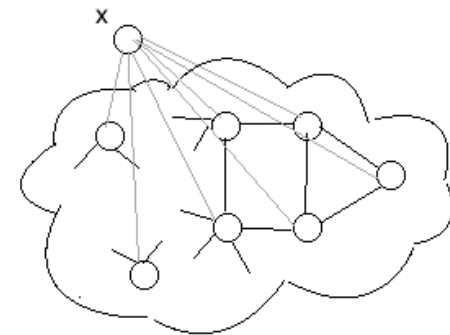
- Nel problema 1-COL ci si domanda se tutti i nodi possono essere colorati con lo stesso colore in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore:
 - questo è possibile se e soltanto se nel grafo non esistono archi
 - ossia se e solo se G è un insieme indipendente
 - e questa proprietà è verificabile in tempo polinomiale
 - Perciò, 1-COL $\in P$
- Nella dispensa 8 viene dimostrato che 2-COL $\in P$ (ma noi non lo vediamo)
 - viene dimostrato che 2-COL $\leq 2SAT$
 - e viene mostrato un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide 2SAT
 - l'appartenenza a P di 2-COL segue dalla chiusura di P rispetto alla riducibilità polinomiale
- Nel paragrafo 9.5.5 viene dimostrato che 3-COL è NP-completo
 - tramite una riduzione da 3SAT
 - che noi non studiamo

4-COL

- Nel problema 4-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore
 - abbiamo già visto che 4-COL $\in$ NP
- Dimostriamo ora che 4-COL è completo per NP tramite una riduzione da 3-COL
 - cioè, dimostriamo che 3-COL $\leq$ 4-COL
- Trasformiamo una istanza $G=(V,E)$ di 3-COL in una istanza $G'=(V',E')$ di 4-COL:
 - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x : sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
 - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi che collegano x a tutti i nodi in V :
 $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V \}$



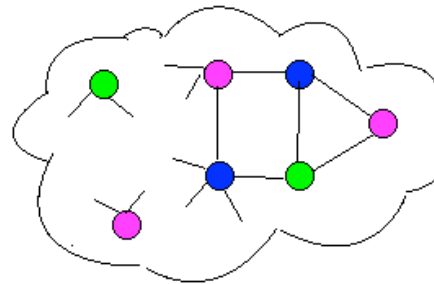
G



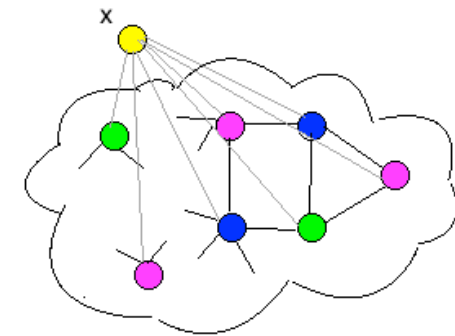
G'

4-COL

- Trasformiamo una istanza $G=(V,E)$ di 3-COL in una istanza $G'=(V',E')$ di 4-COL:
 - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x : sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
 - $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V \}$
- Se i nodi di G possono essere colorati con 3 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore, allora chiamiamo 1, 2 e 3 i colori e:
 - coloriamo con gli stessi colori i nodi in $V' - \{x\}$
 - coloriamo il nodo x con il colore 4
 - abbiamo colorato con 4 colori i nodi di G' in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi
- Quindi, G' è 4-colorabile



G



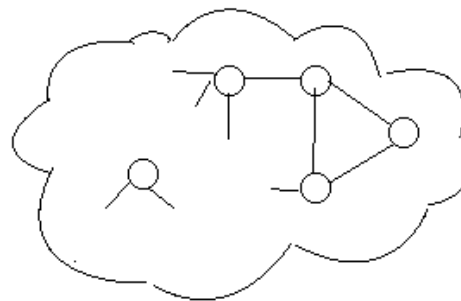
G'

4-COL

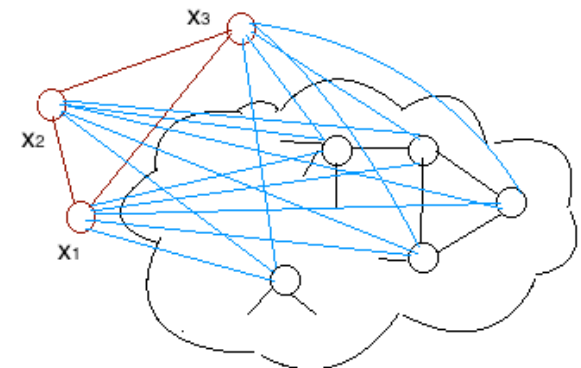
- Trasformiamo una istanza $G=(V,E)$ di 3-COL in una istanza $G'=(V',E')$ di 4-COL:
 - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x : sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
 - $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V \}$
- Se i nodi di G' possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore: sia c la funzione che 4-colora V'
 - chiamiamo 4 il colore assegnato al nodo x : $c(x) = 4$
 - poiché x è adiacente a tutti i nodi in V , allora il colore 4 non può essere utilizzato per colorare alcun nodo in V : per ogni $u \in V$, $c(u) \in \{1,2,3\}$
 - poiché c è una 4-colorazione per G' , allora, per ogni $u,v \in V$ tali che $(u,v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$
 - ossia, c colora i nodi di G con 3 colori in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi
- Quindi, G è 3-colorabile
- Poiché calcolare $\langle G'=(V',E') \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E) \rangle|$
- questo completa la prova che $3\text{-COL} \leq 4\text{-COL}$

k-COL

- Sia $k \in \mathbb{N}$ un intero fissato – **fissato una volta per tutte, perciò costante**
- Nel problema k-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con k colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore
 - abbiamo già visto che k-COL $\in$ NP
- Dimostriamo ora che 3-COL $\leq$ k-COL
- Trasformiamo una istanza $G=(V,E)$ di 3-COL in una istanza $G'=(V',E')$ di k-COL:
 - G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di $k-3$ nuovi nodi $x_1, \dots, x_{k-3}$
 - e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V



G, istanza di 3COL



G', istanza di 6COL

k-COL

- Trasformiamo una istanza $G=(V,E)$ di 3-COL in una istanza $G'=(V',E')$ di k-COL:
 - G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di $k-3$ nuovi nodi $x_1, \dots, x_{k-3}$
 - e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V
- La dimostrazione che G è 3-colorabile se e soltanto se G' è k-colorabile è pressoché identica a quella di 4-COL
- se $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni $(u,v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$
 - allora $c': V' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tale che $c'(u) = c(u)$ per ogni $u \in V$ e $c(x_i) = i+3$ per $i = 1, \dots, k-3$ è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni $(u,v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$,
- se $c': V' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni $(u,v) \in E$, $c'(u) \neq c'(v)$
 - allora $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tale che $c(u) = c'(u)$ per ogni $u \in V$ è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni $(u,v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$,
- Poiché calcolare $\langle G'=(V',E') \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E) \rangle|$
- questo completa la prova che $3\text{-COL} \leq k\text{-COL}$

Infine, Colorabilità

- Ricordiamo che il problema k-COL è una piccola variazione di COL: l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante
- Formalmente: sia $k \in \mathbb{N}$ un valore costante
 - $\mathfrak{I}_{\text{kCOL}} = \{ \langle G=(V,E) \rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{kCOL}}(G) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
 - $\pi_{\text{kCOL}}(G, \mathbf{S}_{\text{kCOL}}(G)) = \exists c \in \mathbf{S}_{\text{kCOL}}(G) : \forall (u,v) \in E [c(u) \neq c(v)]$
- Mentre
 - $\mathfrak{I}_{\text{COL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
 - $\mathbf{S}_{\text{COL}}(G, k) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
 - $\pi_{\text{COL}}(G, k, \mathbf{S}_{\text{COL}}(G,k)) = \exists c \in \mathbf{S}_{\text{COL}}(G,k) : \forall (u,v) \in E [c(u) \neq c(v)]$
- Sappiamo che COL $\in$ NP
- Ma potrebbe mai accadere che COL $\in$ P?

Infine, Colorabilità

- Potrebbe mai accadere che COL $\in$ P?
- Ragioniamo: se esistesse un algoritmo deterministico $\mathcal{A}$ che, dati un grafo G e un intero k , decidesse in tempo polinomiale se G può essere k -colorato
- allora, $\mathcal{A}$ ci permetterebbe di decidere in tempo deterministico polinomiale anche 3COL – basterebbe eseguire $\mathcal{A}(G,3)$!
- Questa osservazione ci mostra che è banale ridurre polinomialmente 3COL a COL:
 - una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di 3COL è trasformata nell'istanza $\langle G=(V,E),3 \rangle$ di COL
- Ossia, 3-COL $\leq$ COL
- E, dunque, COL è NP-completo
- In effetti, COL è una generalizzazione di 3-COL,
 - o, equivalentemente 3COL è un caso particolare di COL
 - proprio come SAT e 3SAT
- In generale: se un caso particolare di un problema è NP-completo, la generalizzazione non può essere “meno che NP-completo”...
- L'inverso, ovviamente, non è detto:
 - il caso particolare 2-COL di COL è in P, il caso particolare 3COL è NP-completo!